基础数学讲义之五

《基础分析学之二》

多元微积分学

项武义

香港科技大学数学系

目录

引子

本册将以上一册研讨单元微积分所得之基础理论为基本，进而研讨多元微积分。一如在上一册的结语中所提及的，在各种各样数理分析中所遇到的问题，通常都是多元、多关系的体系而不是只有一个自变元者。总之，多元微积分才是普遍可用者，而单元微积分则仅仅是在理论上提供了简朴的雏型和基础。把它进而推广到多元、多关系的范畴，一来是十分自然的顺理成章，二来也是迫切亟需的；这是分析学必然的进程。

第 一 章

多元函数的连续性与微分

1.1 多元函数的连续性

设 $u=f(x_1,...,x_n)$ 是一个给定的 n 个自变元 $(x_1,...,x_n)$ 的函数，n 数组 $(x_1,...,x_n)$ 的变域是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域 D，而应变元 u 之值则由 n 数组 $(x_1,...,x_n)$ 之给定而唯一确定者也。它在某一给定点 $(a_1,...,a_n)$ 的「局部连续性」的定义乃是在单元者的直接推广，亦即

【定义】：定义于 D 上的 $u=f(x_1,...,x_n)$ 在 $A(a_1,...,a_n)$ 点的连续的条件是对于任给 $\varepsilon>0$，恒有足够小的 $\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}&|x_i-a_i|<\delta,\ 1\le i\le n,\quad (x_1,...,x_n)\in D\\ \Rightarrow\ &|f(x_1,...,x_n)-f(a_1,...,a_n)|<\varepsilon\end{aligned}$$

我们也可以改用数列与极限，把上述局部连续性重述如下：

对于任给 D 中以 A 为其极限的点列 $\{P_k\}$，亦即

$$P_k(x_{1,k},...,x_{n,k})\in D,\quad \lim_{k\to\infty}x_{i,k}=a_i,\ 1\le i\le n$$

皆有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{1,k},...,x_{n,k})=f(a_1,...,a_n)$$

由此可见 $f(x_1,...,x_n)$ 在其定义域 D 上到处连续的条件就是对于任给 D 中其极限依然在 D 中的点列 $\{P_k\}$，皆有

$$\lim_{k\to\infty}f(P_k)=f(\lim_{k\to\infty}P_k)$$

亦即对于任给 n 个数列 $\{x_{i,k}\}, 1 \le i \le n$，若有

$$(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) \in D,\ \lim_{k\to\infty} x_{i,k} \text{ 存在}, \quad 1 \le i \le n$$
$$\text{而且 } (\lim_{k\to\infty} x_{1,k}, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_{n,k}) \in D$$

则恒有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{1,k}, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_{n,k})$$

[注]：(i) 从上述多元函数的连续性的定义的基本面 (basic feature) 来看，多元函数的情形和单元函数的情形如出一辙，只是每个变元 x_i 皆有其趋于 a_i 的数列 $\{x_{i,k}\}$，所以在上述连续性的条件式中涉及 n 个收歛的数列而不再是仅仅一个收歛数列。

(ii) 其实多元的连续性和单元的连续性两者相比，前者的确要比後者来得复杂多样，其主要原因有二：其一是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 D 要远比 $\mathbb{R}^1$ 中的区间多样得多；其二是上述极限条件式要比单元者强得很多（在单元的情形一个收歛数列基本上只有从左、右两个方向去逼近其极限值；但是在多元的情形则可以从无穷多个方向逼近其极限点），所以多元函数的不连续性要远比单元函数的不连续性复杂多样。由此可以想到，在多元的数理分析中，连续性就变得更加重要了。很多常用好用的公式和定理，往往都有赖于所涉及的函数的连续性！

(iii) 多元函数的连续性在本质上是一个非常强的条件，但是它也是一种非常自然的条件。所以在很多多元的数理分析问题中，所涉及的函数往往都自然而然地在大部分定义域上连续。总之，在对于某一问题作数理分析中，对于其所涉及的函数的连续性成立的范围务必小心检查；而在连续性不成立的地方（奇点），当然就得格外用心，另行设法区别处理之。

(iv) 单元微积分中，在一个闭线段上到处连续的函数具有好些优良的基本性质（参看第四册第一章），而且它们又在单元微积分的基础理论中扮演重要的角色。很自然地我们在此要问：在多元的各种各样变域中，究竟那些才是「闭线段」的适当推广呢？换句话问，在那一种变域上到处连续的多元函数依然保有在闭线段上到处连续的单元函数所具有的那些优良性质呢？

【分析】：

要解答上述问题，自然又得对于上一册第一章对于那些优良性质的论证，再做一次温故知新，分析一下在论证中，所用到的闭线段的本质究竟是些什麼？不难看到下述三点是显然必要的：其一是有界性，其二是连通性而其三则是极限封闭性，亦即闭线段中的任给收歛数列的极限点依然位于其中。

由此可见，要真正掌握多元函数的连续性，就必须对 $\mathbb{R}^n$ 中的区域的几何本质先下一番功夫，明确其有界性、连通性、极限封闭性等等的实质内含。

有界性：将 $\mathbb{R}^1$ 中一个子集 $\mathcal{S}$ 的有界性直接推广，即得 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集 $\mathcal{S}$ 的有界性之定义，即：存在一个足够大的 K 使得所有 $\mathcal{S}$ 中之点的坐标皆满足 $|x_i| \leq K, 1 \leq i \leq n.$

例如下述 n–维方块：

$$\square^{(n)}(2K) := \{(x_1, \ldots, x_n); |x_i| \leq K,\ 1 \leq i \leq n\}$$

本身乃是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界子集，而任何有界子集都是足够大的 $\square^{(n)}(2K)$ 一个子集是也。

连通性：设 $\{\varphi_i(t), 1 \leq i \leq n\}$ 乃是定义于 $[a, b]$ 上的 n 个连续函数，则参数式

$$x_i = \varphi_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

所描述者乃是 $\mathbb{R}^n$ 中连结 $A(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a))$ 和 $B(\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b))$ 的一条连续曲线。

【定义】：若 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 $\mathcal{S}$，其中任给两点 A, B 皆能有完全包含在 $\mathcal{S}$ 之内的连续曲线连结之，则称之为连通子集。

极限封闭性：$\mathbb{R}^n$ 中的子集 $\mathcal{S}$，若满足其中任给收歛点列的极限点依然是 $\mathcal{S}$ 中之点，则称 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭子集 (close set)。

例如上述 $\square^{(n)}(2K)$ 是一个闭子集，但将其中任何一点略去，则就不再是闭子集了。

相对于闭子集，下述开子集 (open set) 也是在分析学中极为基本的概念，即

【定义】：对于给定点 $A(a_1,\ldots,a_n)$ 和 $\delta>0$,

$$U_\delta(A) := \{(x_1,\ldots,x_n);\ |x_i-a_i|<\delta,\ 1\le i\le n\}$$

叫做 A 点的 δ–邻域 (δ-neighborhood)。

【定义】：$\mathbb{R}^n$ 中的子集 $\mathcal{S}$，若对于其中任给一点 A 皆有其（足够小的）δ–邻域 $U_\delta(A)\subset\mathcal{S}$，则称 $\mathcal{S}$ 为一开子集。

注意：空集合应该看做开子集（或闭子集）的特例。

令

$$\square_0^{(n)}(2K) := \{(x_1,\ldots,x_n);\ |x_i|<K,\ 1\le i\le n\}$$

则不难验证 $\square_0^{(n)}(2K)$ 乃是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集。

【习题】：

(1) 任给一组闭子集的交集也是一个闭子集，而任给一组有限个开子集的交集也是一个开子集，试证之。

(2) 任给一组开子集的和集也是一个开子集，而任给一组有限个闭子集的和集也是一个闭子集，试证之。

(3) 试证一个开子集的补集乃是一个闭子集。

(4) 试证一个闭子集的补集乃是一个开子集。

(5) 令 $f(x,y)$ 为定义于 $\mathbb{R}^2$ 的二元函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

试验证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(6) 令 $f(x,y)$ 为定义于 $\mathbb{R}^2$ 的二元函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

试验证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续。[试把 $f(x,y)$ 局限于变域 $x=y$，并求当 $x\to 0$ 时其极限。]

(6) 令 $f(x,y)$ 为定义于 $\mathbb{R}^2$ 的二元函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？

(8) 设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 和 $g(x_1,\dots,x_n)$ 是两个同一变域 D 上到处连续的函数，试证

$$(f+g)(x_1,\dots,x_n):=f(x_1,\dots,x_n)+g(x_1,\dots,x_n)$$
$$(f\cdot g)(x_1,\dots,x_n):=f(x_1,\dots,x_n)\cdot g(x_1,\dots,x_n)$$

也是 D 上到处连续的函数。

(9) 试证任给 n 元多项式函数都是 $\mathbb{R}^n$ 上到处连续的函数。

(10) 设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是一个连通的区域 D 上到处连续的函数。A, B 是 D 中任给两点，c 是介于 $f(A)$ 和 $f(B)$ 之间的值。试证 D 中总是存在一点 P 使得 $f(P)=c$。[单元函数中间值定理之推广]

(11) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界、连通闭子集而 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是 D 上到处连续的函数。试证其函数值所构成者乃是 $\mathbb{R}$ 中的一个闭线段（亦即 $\mathbb{R}^1$ 中的有界、连通闭子集是也）。[提示：参考上册第一章中[定理 1.2]和代数基本定理的证明之中 $|f(z)|^2$ 在 $\square(2K)$ 上的极小值之存在性之论证。]

(12) 设

$$u_i=f_i(x_1,\dots,x_n),\quad 1\le i\le m$$

都是 D 上的连续函数，而 $y=g(u_1,\dots,u_m)$ 则是 $\mathbb{R}^m$ 上的连续函数。试证复合函数

$$y=g(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\dots,f_m(\mathbf{x})),\quad \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$$

也是 D 上的连续函数。

(13) （思考题）试问应该如何定义由 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域 D 到 $\mathbb{R}^m$ 中的一个区域 D' 的映射的连续性？在适当的定义之下，连续映射的组合应该还是连续映射，试说明之。

1.2 多元函数的微分

归根究底，一个单元函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$「可微」的实质就是在该点的微小 δ–邻域上，$f(x)$ 具有一个线性逼近 (linear approximation) $\ell(x)$（亦即 $f(x)-\ell(x)$ 在足够小的 δ–邻域上是一个高于一阶的微量），它就是 $f(a)+f'(a)(x-a)$，而 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ 也就是 $y=f(x)$ 在 $(a,f(a))$ 点的切线方程式。由此可以想到，一个多元函数 $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ 在 $A(a_1,\ldots,a_n)$ 点可微的定义也就是它在 A 点的一个足够小的 δ–邻域, $U_\delta(A)$, 上具有一个线性逼近，亦即

【定义】：若存在一个线性函数

$$\ell(x_1,\ldots,x_n)=f(a_1,\ldots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-a_i)$$

使得

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}}\Big|f(x_1,\ldots,x_n)-\ell(x_1,\ldots,x_n)\Big|,\quad |x_i-a_i|<\delta$$

在 $\delta\to 0$ 时的极限值为 0，则称 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 在 $A(a_1,\ldots,a_n)$ 点是可微的 (differentiable)。

[注]：若 f 在 A 点可微，则 f 必须在该点连续，其证明留作习题。

当我们把上述可微性的条件式局限到 $x_i=a_i$, $2\le i\le n$, 的特殊情形之下，它就简化成单元函数 $f(x_1,a_2,\ldots,a_n)$ 在 $x_1=a_1$ 点的可微的条件式。再者，由此易见上述线性逼近中的系数 c_1 必须等于 $f(x_1,a_2,\ldots,a_n)$ 在 $x_1=a_1$ 点的变率。同理 c_2 必须等于 $f(a_1,x_2,a_3,\ldots,a_n)$ 在 $x_2=a_2$ 点的变率, $\ldots$, c_n 必须等于 $f(a_1,\ldots,a_{n-1},x_n)$ 在 $x_n=a_n$ 点的变率。

偏微分的定义与符号：设 x_i 的单元函数 $f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ 在 $x_i=a_i$ 点可微，则其在该点的变率定义为函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 在 $A(a_1,\ldots,a_n)$ 点对于 x_i 的偏导数 (partial derivative)，将以符号 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A$ 记号之，亦即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A=\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(\ldots,x_i,\ldots)-f(\ldots,a_i,\ldots)}{x_i-a_i}$$

总结上述简短的讨论，即有下述可微性的一个必要条件，即

【引理1】：若 $f(x_1,...,x_n)$ 在 $A(a_1,...,a_n)$ 点可微，则它在 $A(a_1,...,a_n)$ 点对于 $x_i, 1 \le i \le n$, 的偏导数皆存在（亦即其定义的极限存在），而且它在 A 点邻近的线性逼近就是

$$\ell(x_1,...,x_n) = f(a_1,...,a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A (x_i - a_i)$$

[注]：(i) 一般来说，上述 n 个偏导数的存在，只是可微性的必要条件（并非充要条件，见下面的例子）！

(ii) 把偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A$ 有定义之点的值逐一纪录，即得另一个 n 元函数（其定义域可能要比 $f(x_1,...,x_n)$ 的变域要小些）称之为 f 对于 x_i 的偏导函数，将以符号 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 记之。

(iii) 由一个给定函数 $f(x_1,...,x_n)$ 去求它的各个偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 的计算叫做<u>偏微分</u> (partial differentiation)，它本质上其实就是单元函数的微分，只是在计算 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 时，除了 x_i 之外的 $(n-1)$ 个变元都要当做固定不变的常数来看待。总之，偏微分运算实乃原先业已熟习的单元函数的微分，亦即那个只让 x_i 变动而其他 $(n-1)$ 个变元则都<u>暂且固定不动</u>，如此简化而得的单元函数的微分是也。读者只要稍作练习，即可充分掌握。

【例子】：令

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

则由偏导函数的定义即可求得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{h'\to 0} \frac{f(0,h') - f(0,0)}{h} = \lim_{h'\to 0} \frac{0-0}{h'} = 0$$

但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微，因为它根本在 $(0,0)$ 点不连续！由此可见，若只是要求偏导函数的存在是不足以用来有效研讨问题的。若要能够有效研讨问题，就必须要加上偏导函数的连续性！

在单元微积分中，当导函数（或高阶导函数）也具有连续性时，均值（或高阶均值）定理就成为十分好用的有力工具。其实，在多元微积分中，偏导函数的连续性就变得更加重要和必要了。有鉴于此，在往後的讨论中，除非另加申明，我们总是设所涉及的函数的定义域是一个开子集 D，而且它所涉及的偏导函数（或高阶偏导函数）也都是 D 上的连续函数。首先，偏导函数的连续性足以保证原给函数的可微性，即：

【定理 1.1】：设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, 1\le i\le n,$ 都在 A 点的一个 δ–邻域 $U_\delta(A)$ 上是连续的，则 $f(x_1,\dots,x_n)$ 在 A 点是可微的，其线性逼近为

$$\ell(x_1,\dots,x_n)=f(a_1,\dots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A(x_i-a_i)$$

证明：先证 $n=2$ 的情形，而一般情形的证法其实是和 $n=2$ 者完全相同（只是叙述和符号上稍加繁复）。用单元的均值定理，即得

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)\\&=\Big(f(x_1,x_2)-f(a_1,x_2)\Big)+\Big(f(a_1,x_2)-f(a_1,a_2)\Big)\\&=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2)(x_2-a_2)\end{aligned}$$

再由所设之 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 的连续性，即有

$$f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)=\Big(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_A+\varepsilon_1\Big)(x_1-a_1)+\Big(\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_A+\varepsilon_2\Big)(x_2-a_2)$$

而且当 $(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)$ 时，$\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\to 0$。由此易见

$$\begin{aligned}&\frac{\left|f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)-\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_A(x_1-a_1)-\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_A(x_2-a_2)\right|}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}\\&\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0\end{aligned}$$

至此不难看出，上述证法是可以直截了当地推广到 n 是一般的情形的

。先将 $f(x_1,\dots,x_n)-f(a_1,\dots,a_n)$ 改写成 n 个差之和，即

$$\begin{aligned}&\Big(f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(a_1,x_2,\dots,x_n)\Big)\\+&\Big(f(a_1,x_2,x_3,\dots,x_n)-f(a_1,a_2,x_3,\dots,x_n)\Big)\\+&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\+&\Big(f(a_1,\dots,a_{n-1},x_n)-f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)\Big)\end{aligned}$$

然後再对于每个差运用单元的均值定理和各个偏导函数的连续性即可证得。 □

<u>全微分和 Leibnitz 符号</u>：

关于多元函数的微分，当年 Leibnitz 所采用的符号既简洁又好用，这也就是现在大家所通用者：

当 $x_i, 1\le i\le n$, 是<u>自变元</u>时，我们用 dx_i 表示它的一个任给的微小「增量」，亦即设想自变元 x_i 由 a_i 改变为 a_i+dx_i。在上述变动之下，$f(x_1,\dots,x_n)$ 所相应的「增量」乃是：

$$\Delta f=f(a_1+dx_1,\dots,a_n+dx_n)-f(a_1,\dots,a_n)$$

在 $f(x_1,\dots,x_n)$ 满足上述[定理 1.1]的条件时，则 Δf 有其<u>局部线性逼近</u>，我们将以符号 $df\big|_A$ 表示它，即

$$df\Big|_A=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_A dx_i$$

称之为 f 在 A 点的<u>全微分</u> (total differential of f at A)。

在本质上，每个 dx_i 乃是一个<u>取值微小的自变元</u>，所以上述 $df\big|_A$ 乃是 $\{dx_i,1\le i\le n\}$ 这 n 个微小的自变元的一个齐线性函数。再者，A 乃是 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的变域 D（设其为开子集而 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1\le i\le n$, 都在 D 上到处连续）任给一点。由此可见，上述全微分当 A 点在 D 中任意变动时，实乃下述 $2n$ 个变元的函数，即 $\{x_i\}$ 和 $\{dx_i\}$

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

它对于 $\{dx_i\}$ 这 n 个微小变元来说，总是齐线性的；它也就是一个 D 上到处可微的函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 在各处的局部线性逼近的总体表述。

【例子】：求 $f(x,y)=e^{ax}\cos by$ 的全微分。

$$
\begin{aligned}
df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \\
&= (ae^{ax}\cos by)dx-(be^{ax}\sin by)dy
\end{aligned}
$$

接着，让我们来看一看复合函数的全微分：

设 $f(u_1,\ldots,u_m)$ 是 $u_j, 1\le j\le m,$ 的函数而每个 u_j 则是 n 个自变元 $x_i, 1\le i\le n,$ 的函数，即 $u_j=g_j(x_1,\ldots,x_n)$，而且它们都满足上述定理的条件，亦即 $\frac{\partial f}{\partial u_j}, \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ 都是在一个开的定义域 D 上到处连续者。

在 D 中任取一点 $(x_1,\ldots,x_n)$ 及其任给邻近一点 $(x_1+dx_1,\ldots,x_n+dx_n)$，令

$$
\begin{aligned}
\Delta u_j &= g_j(x_1+dx_1,\ldots,x_n+dx_n)-g_j(x_1,\ldots,x_n), \quad 1\le j\le m \\
\Delta f &= f(u_1+\Delta u_1,\ldots,u_m+\Delta u_m)-f(u_1,\ldots,u_m)
\end{aligned}
$$

其中 $u_j=g_j(x_1,\ldots,x_n), 1\le j\le m$。和[定理 1.1]的证明中同样的计算，即可用均值定理和所涉及的偏导函数的连续性得出

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1,\ldots,u_m)+\varepsilon_j\right)\Delta u_j \\
\Delta u_j &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)+\delta_{i,j}\right)dx_i
\end{aligned}
$$

其中 ε_j 和 $\delta_{i,j}$ 都是在 $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}dx_i^2}\to 0$ 之下也 $\to 0$ 者也。由此可见 Δf 在 $(x_1,\ldots,x_n)$ 的局部线性逼近乃是

$$
\begin{aligned}
df &= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1,\ldots,u_m)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)dx_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}du_j
\end{aligned}
$$

所以，在算式上来看，一个（一阶）连续可微的函数 $f(u_1,...,u_m)$ 的全微分，不论其变元是自变元或是因变元，恒有

$$(*) \qquad df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j$$

[注]：把上式中以 $du_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$ 代入，即得

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i$$

由此可见复合函数 $f(g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n))$ 对于 x_i 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 也就是上述表式中 dx_i 的系数，亦即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

这也就是对于复合函数求其偏导函数时的 Chain Rule。总之，上述（连续）可微函数一以贯之的全微分公式业已自然而然地把 Chain Rule 包含于其中。再者，在多元数理分析中，全微分才是真正有用的主角，偏导函数的计算乃是求全微分的表式中的系数函数者也。而且在实际的计算中，只要逐次去求所涉及的变元的全微分（而它们都可以用 (*)–式一以贯之），然後只要再用展开、集项等简单的代数运算（亦即分配律）即可得其所求。

【例子】：令 $f = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中 $\{r,\theta\}$ 是相互无关的自变元。则有

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\theta)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)$$

由上述等式即可解出

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}(\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}(-\frac{1}{r}\sin\theta)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}(\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}(\frac{1}{r}\cos\theta)$$

<u>方向导数 (directional derivative)：</u>

假如我们把 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的自变元限制到其变域 D 中的一条可微参数曲线 γ，亦即

$$\gamma:\ \{x_i=\varphi_i(t),\ 1\le i\le n\}$$

则有 $dx_i=\varphi_i'(t)dt$

$$df=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\gamma}\varphi_i'(t)dt$$

亦即复合函数 $f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ 对于单元参变数 t 的导数乃是

$$\frac{df}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\gamma}\cdot\varphi_i'(t)$$

再者，设 $\{a_i=\varphi_i(0),\ 1\le i\le n\}$ 是 γ 的起始点坐标，则

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{A}\varphi_i'(0)$$

叫做 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 在 A 点对于 γ 的初速方向的方向导数，仅仅和 γ 的初速方向 $\mathbf{v}=(\varphi_1'(0),\ldots,\varphi_n'(0))$ 有关。我们将以 $D_{\mathbf{v}}f\big|_A$ 表示之，亦即

$$D_{\mathbf{v}}f\big|_A=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{A}v_i$$

其中 v_i 乃是在 A 点的速度向量 $\mathbf{v}$ 的分量。

[注]：f 在 A 点的可微性也是必须的。例如，令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

则易证 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$。但是当 $\varphi_1(t)=t,\ \varphi_2(t)=t$ 时，$(\varphi_1'(0),\varphi_2'(0))=(1,1)$ 而且

$$\left.\frac{df(\varphi_1(t),\varphi_2(t))}{dt}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{t^2+t^4}-0}{t}=1$$

显然在这个情况

$$\left.\frac{df(\varphi_1(t),\varphi_2(t))}{dt}\right|_{t=0} \neq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} \varphi_1'(0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} \varphi_2'(0)$$

【习题】：

(1) 试证若 f 在 A 点可微，则 f 必需在 A 点连续。

(2) 试验证上一节习题 (5) 中的连续函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

(3) 求下述函数的全微分

(i) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

(ii) $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2), \quad x^2+y^2+z^2>0$

(iii) $f(x,y) = \sin x \cos y$

(iv) $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)$

(4) 令 $f = f(ax+by)$，试证 $b\dfrac{\partial f}{\partial x} - a\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$。

(5) 设 $\varphi(t)$ 为一阶连续可微函数。令 $f(x,y) = x^n\varphi(\dfrac{y}{x^2})$，试验证

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = n\cdot f$$

<u>多元的泰勒公式与局部高阶逼近</u>：

在单元微积分中，泰勒公式说明了一个局部高阶连续可微的单元函数具有多项式函数的局部高阶逼近。同样的，一个高阶连续可微的多元函数也具有其多元多项式函数的局部高阶逼近。这也就是我们接著所要研讨者——泰勒公式的多元推广。它也就是多元微分学中的高阶均值定理。

【定义】：设某一给定多元函数 $f(x_1,...,x_n)$，不但其偏导函数 $\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\}$ 都是在其（开的）定义域 D 上到处连续，而且它们的偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}), 1\leq i,j\leq n$, 也都是在 D 上到处连续，则称 f 为 D 上二阶连

续可微的函数。再者，若所有二阶偏导函数 $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\}$ 也都是在 D 上到处连续可微，则称 f 为 D 上三阶连续可微的函数。以此逐步推进，若 f 的所有 k–阶偏导函数在 D 上都是到处连续，则称 f 为 D 上 k–阶连续可微的函数。

首先，当 $i \neq j$ 时，二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 是有可能在某些点两者都有其确定值但是彼此相异者也（见下面例子）。但是在 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 都是到处连续的情形，则它们在每点之值恒相等，亦即两者乃是 D 上的同一个函数，即下述引理

【引理 2】：若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 在 D 上都是到处连续，则它们乃是 D 上的同一个函数。

证明：因为在求偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 时，除了 x_i 和 x_j 之外的其他变元都是暂且固定不变的，所以上述引理的证明显然可以归于 $n = 2$ 的情形验证之，而 $\{i, j\}$ 则为 $\{1, 2\}$。兹证之如下：

对于 D 中任给一点 (x_1, x_2) 和足够小的 (h, k)，由均值定理，即得

$$\begin{aligned}
& f(x_1 + h, x_2 + k) - f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2 + k) + f(x_1, x_2) \\
&= h\phi'(x_1 + \theta h) \qquad [\phi(x) = f(x, x_2 + k) - f(x, x_2)] \\
&= h[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h, x_2 + k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h, x_2)] \\
&= hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \theta h, x_2 + \theta' k), \quad 0 \leq \theta, \theta' \leq 1
\end{aligned}$$

同理也可以说明存在适当的 $0 \leq \theta_1, \theta_1' \leq 1$ 使得

$$\begin{aligned}
& f(x_1 + h, x_2 + k) - f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2 + k) + f(x_1, x_2) \\
&= hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 + \theta_1 h, x_2 + \theta_1' h)
\end{aligned}$$

亦即存在适当的 $0 \leq \theta, \theta', \theta_1, \theta_1' \leq 1$ 使得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \theta h, x_2 + \theta' k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 + \theta_1 h, x_2 + \theta_1' k)$$

由此可见，当 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ 连续的情形

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

因为它们分别是前述等式两端在 $h, k \to 0$ 之下的极限值。 □

[注]：在[引理 2]中二阶偏导数函数的连续性的条件是需要的。试考虑下述定义于 $\mathbb{R}^2$ 的函数 $f(x,y)$：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

则当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，易求得：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

另一方面，当 $(x,y) = (0,0)$ 时，由偏导数的定义极限式易求得 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$。由此可见

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(h,0)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4}{h} = 1$$

类似地，亦可算得

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0,0)} = -1$$

所以一般来说 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$。

【例子】：设 $f(x,y)$ 为二阶连续可微函数。令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中 r, θ 为相互无关的独立自变元。试验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

解：先求一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$：

$$\frac{\partial f}{\partial r} == \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} == -\frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}x$$

再求二阶偏导函数

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial r})\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial r})\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial x}\right\}\frac{\partial x}{\partial r} \\
&\quad + \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial y}\right\}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

其中用上了 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 和

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial r} = 0 \\
\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial(\sin\theta)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\partial(\sin\theta)}{\partial r} = 0
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial \theta})\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial \theta})\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \left\{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}y + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}x + \frac{\partial f}{\partial y}\right\}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \left\{-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}y - \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}x\right\}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r^2\sin^2\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r^2\cos^2\theta) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(-r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta)
\end{aligned}
$$

由此可见

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}(\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}
\end{aligned}
$$

即得所求证者。

设 $f(x_1,...,x_n)$ 是一个开子集 D 上的 k–阶连续可微函数，$A(a_1,...,a_n)$ 和 $B(a_1+dx_1,...,a_n+dx_n)$ 是其中取定的邻近两点，而且连结 A, B 两点的直线段完全位于 D 之内，亦即对于所有 $0 \le t \le 1$,

$$(a_1+tdx_1,...,a_n+tdx_n) \in D$$

令 $F(t)=f(a_1+tdx_1,...,a_n+tdx_n)$（因为 a_i 和 dx_i 都是取定之常数，所以它乃是一个 t 的单元函数），不难看到 $F(t)$ 是在 $[0,1]$ 上 k–阶连续可微的。所以，我们可以直接用单元的泰勒公式得出

$$\begin{aligned} &f(a_1+dx_1,...,a_n+dx_n)=F(1)\\ &=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+...+\frac{1}{(k-1)!}F^{(k-1)}(0)+\frac{1}{k!}F^{(k)}(0) \end{aligned}$$

由此可见，我们只要去计算 $F'(0)$, ..., $F^{(k-1)}(0)$ 和 $F^{(k)}(0)$ 即可得出多元 k–阶连续可微函数的泰勒公式，例如

$$F'(0)=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A dx_i = df\big|_A$$

而 $F''(0)$ 等等的逐步计算其本身乃是一个自然的好习题。

【习题】：

(1) 设 $f(x,y,z)$ 为二阶连续可微函数。令 $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$, 其中 ρ, θ, φ 为相互无关的独立自变元。试验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \varphi}$$

[提示：先把自变元 (x,y,z) 转换为 (r,ϕ,z)，其中 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$，由例题结论即得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

然後再用 $r=\rho\sin\theta$, $\phi=\varphi$, $z=\rho\cos\theta$ 转换上述等式右方。]

(2) 试验证在上面多元泰勒展开式中

$$F''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_A dx_i dx_j$$

(3) 试写出下列函数在 $(0,0)$ 点的泰勒展开式（直到二阶微量为止）：

(i) $f(x,y) = \sin(x+y)$

(ii) $f(x,y) = e^{xy}$

(iii) $f(x,y) = e^x \cos y$

第 二 章

多元多关系的微分

在上一章中，我们讨论了多元函数的连续性与微分。一个在某个开子集 D 上连续可微的函数 f，它的全微分 df 简洁地总括了它在 D 上每点的局部线性逼近。这就是一个连续可微函数用微分法去分析之所得的总体和精要。再者全微分的计算用来用去就是

$$(*) \qquad df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j$$

的逐步运用和用代数分配律的展开、集项，是十分简朴、易算、好用的。它是多元微分的初步与基础。

但是在各种各样数理分析中所遇到的问题，通常乃是多元而且多关系的，亦即所涉及的数理体系含有多个参变量，而这些参变量之间又具有多个函数关系相互关连著。例如三角形的三边边长和三内角角度及其正弦、馀弦定律；一个球面上各点的三个坐标和它们所满足的方程式等等。本章将进而研讨这种多元、多关系的数理体系在微分分析上的基础理论。其要点在于隐函数定理、坐标变换和定义在这种体系上的极值问题。

2.1 隐函数定理

设有 n 个变元 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 在 $\mathbf{x}_0$ 点之邻域之内满足一组函数关系：

$$(\star)\qquad \{f_i(\mathbf{x})=0,\ 1\le i\le m<n\},\quad （f_i \text{ 一阶连续可微}）$$

试问在什麽条件之下存在著上述方程组的局部「解函数组」？它将其中 m 个变元（不妨设为 $x_1,\ldots,x_m$）表达成其馀 $(n-m)$ 个变元（不妨设为 $x_{m+1},\ldots,x_n$）的连续函数，亦即存在连续函数

$$x_i=\varphi_i(x_{m+1},\ldots,x_n),\quad \varphi_i(x_{m+1,0},\ldots,x_{n,0})=x_{i,0}$$

使得

$$f_i(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,x_{m+1},\ldots,x_n),\quad 1\le i\le m$$

在 $(x_{m+1,0},\ldots,x_{n,0})$ 的适当邻域内恒等于 0。

在 $f_i(\mathbf{x})=0,\ 1\le i\le m$, 都是线性方程这种最为简单的情形，亦即 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 都等于常数的情形，则显然有熟知的代数条件式，即当（常数行列式）

$$(2.1)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，存在唯一的线性解函数 $x_i=\ell_i(x_{m+1},\ldots,x_n),\ 1\le i\le m$。往後我们将用 Jacobi 所创的符号以

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)} \ \text{表示}\ \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right| \\ &\left.\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right|_{\mathbf{x}_0} \ \text{表示}\ \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right| \end{aligned}$$

这类由一阶偏导函数组成的行列式通称之为 Jacobians。在一般的情形，若

$$(2.3)\qquad \left.\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right|_{\mathbf{x}_0}\neq 0$$

则原方程组 $\{f_i=0\}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 点的局部线性逼近方程组

$$(\star_0)\qquad df_i\Big|_{\mathbf{x}_0}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)dx_j,\quad dx_j=(x_j-x_{j,0})$$

具有下述唯一线性解函数

$$(2.4)\qquad dx_i=\sum_{j=m+1}^{n}c_{ij}dx_j,\quad 1\le i\le m$$

其中

$$(2.4')\qquad c_{ij}=-\frac{\left.\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(\ldots,x_j,\ldots)}\right|_{\mathbf{x}_0}}{\left.\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right|_{\mathbf{x}_0}}$$

而 $\partial(\ldots,x_j,\ldots)$ 表示将 x_i 改为 x_j 者。

【隐函数定理】：设 $\{f_i(\mathbf{x}),1\le i\le m\}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 的邻域皆为一阶连续可微，而且 $\left.\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right|_{\mathbf{x}_0}\neq 0$，则方程组

$$(\star)\qquad f_i(\mathbf{x})=0,\quad 1\le i\le m$$

存在一组唯一的连续（局部）解函数

$$(*)\qquad x_i=\varphi_i(x_{m+1},\ldots,x_n),\quad \varphi_i(x_{m+1,0},\ldots,x_{n,0})=x_{i,0}$$

使得

$$f_i(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,x_{m+1},\ldots,x_n),\quad 1\le i\le m$$

在 $(x_{m+1,0},\ldots,x_{n,0})$ 的适当邻域内恒等于 0。再者，$\{\varphi_i,1\le i\le m\}$ 都是一阶连续可微者，而且

$$(*')\qquad d\varphi_i=-\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(\ldots,x_j,\ldots)}}{\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}}\right)dx_j,\quad 1\le i\le m$$

证明：我们将先证 $m=1$ 的情形，然後归纳地论证其一般的情形。

$\underline{m=1}$：亦即由 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\neq 0$ 论证 $x_1=\psi_1(x_2,\ldots,x_n)$ 之存在性。由所设 $f_1(\mathbf{x})$ 的一阶连续可微性和 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\neq 0$，只要 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|$ 足够小，恒有

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right| > \frac{1}{2}\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\right| \quad \text{（令其为 } a\text{）}$$

$$\text{Max}\left\{\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right|, 2\leq j\leq n\right\} < K \tag{2.5}$$

设 $\widetilde{\mathbf{x}}=(x_2,\ldots,x_n)$ 是 $\widetilde{\mathbf{x}}_0=(x_{2,0},\ldots,x_{n,0})$ 的足够小邻域中的取定一点，亦即 $|x_j-x_{j,0}|<\delta$, δ 足够小。由一阶均值定理，即有

$$\Delta f_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1)(x_1-x_{1,0})+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\xi_j)(x_j-x_{j,0}) \tag{2.6}$$

若将 $(x_1-x_{1,0})$ 分别取用 $\pm\varepsilon_0$，而将 δ 取成小于 $\frac{a\varepsilon_0}{(n-1)K}$，则由 (2.6)–式显然有

$$f_1(x_{1,0}+\varepsilon_0,\widetilde{\mathbf{x}}) \quad \text{和} \quad f_1(x_{1,0}-\varepsilon_0,\widetilde{\mathbf{x}}) \text{ 异号}$$

所以由中间值定理和单调性即有唯一的 $x_1=\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}})$ 使得

$$f_1(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}})=0$$

再者，由 $\Delta f_1=0$ 易见 $\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}})$ 一阶可微而且

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}})d\psi_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}})dx_j=0$$

$$\Rightarrow d\psi_1=-\sum_{j=2}^{n}\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}})}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}})}dx_j$$

一般情形的归纳论证：

亦即归纳假设定理在 $m-1$ 时业已成立，推论其在 m 时也成立。不妨设 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\neq 0$。由上述之所证，存在 $\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}})$ 使得 $\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}_0)=x_{1,0}$, $f_1(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}})\equiv 0$。令

$$g_i(\widetilde{\mathbf{x}})=f_i(\psi_1(\widetilde{\mathbf{x}}),\widetilde{\mathbf{x}}), \quad 2\leq i\leq m$$

即有

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \left(-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

由此可见

$$0 \neq \left. \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \right|_{(\psi_1(\tilde{\mathbf{x}}_0), \tilde{\mathbf{x}}_0)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \left. \frac{\partial(g_2, \ldots, g_m)}{\partial(x_2, \ldots, x_m)} \right|_{(\psi_1(\tilde{\mathbf{x}}_0), \tilde{\mathbf{x}}_0)}$$

所以

$$\left. \frac{\partial(g_2, \ldots, g_m)}{\partial(x_2, \ldots, x_m)} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_0} \neq 0$$

由归纳假设，存在唯一的一组连续函数

$$\varphi_i(x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad \varphi_i(x_{m+1,0}, \ldots, x_{n,0}) = x_{i,0}, \quad 2 \leq i \leq m$$

使得 $g_i(\varphi_2, \ldots, \varphi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv 0$，而且 φ_i 都是一阶连续可微者。

$$d\varphi_i = -\sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\frac{\partial(g_2, \ldots, g_m)}{\partial(\ldots, x_j, \ldots)}}{\frac{\partial(g_2, \ldots, g_m)}{\partial(x_2, \ldots, x_m)}} \right) dx_j$$

令 $\varphi_1 = \psi_1(\varphi_2, \ldots, \varphi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$，不难验证 $\{\varphi_i, 1 \leq i \leq m\}$ 即为所求证者。 □

注意：上述证明仅仅论证其解函数的唯一存在性。一般来说，除非在极为简单的方程组（例如线性方程组），这种唯一存在的解函数是无法求得其明确表达式 (explicit expressions) 的。所以它乃是由方程组所唯一确定的隐函数 (implicit functions)。但是这组隐函数的线性逼近式却又是有 $(\star')$ 这种简明的表达式者。这里，再一次说明微分法（亦即线性逼近）的妙处与用场。

总之，隐函数定理乃是一个概念性的基本定理。让我们再用几何观点来对于隐函数定理的内含作一剖析：

(i) 设 $f_i(\mathbf{x})$ 是开子集 D 上的连续可微函数，则条件式 $f_i(\mathbf{x}) = 0$ 所描述者，乃是 D 中的一个 $(n-1)$–维子集，通常称之谓超曲面 (hypersurface)。

设 $\mathbf{x}_0$ 是其上一点（即有 $f_i(\mathbf{x}_0)=0$）而且 $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}_0}, 1\leq j\leq n\right\}$ 之中至少有一非零，则

$$0 = df_i\big|_{\mathbf{x}_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}_0} dx_j, \quad dx_j = (x_j - x_{j,0})$$

乃是 $\mathbb{R}^n$ 中过 $\mathbf{x}_0$ 点和向量 $(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\big|_{\mathbf{x}_0}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\big|_{\mathbf{x}_0}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\big|_{\mathbf{x}_0})$ 垂直的那个超平面，它就是 $f_i(\mathbf{x})=0$ 所描述的超曲面的切平面是也。

[注]：通常我们把上述法向量叫做 f_i 在 $\mathbf{x}_0$ 的梯度向量 (the gradient vector of f_i at $\mathbf{x}_0$)，并以符号 $\nabla f_i\big|_{\mathbf{x}_0}$ 表示之。

(ii) 隐函数定理的条件式，亦即存在有 $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n$ 使得

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})}\bigg|_{\mathbf{x}_0} \neq 0$$

其几何意义乃是它们的梯度向量 $\{\nabla f_i\big|_{\mathbf{x}_0}, 1\leq i\leq m\}$ 是线性无关的 (linearly independent)。所以它们在 $\mathbf{x}_0$ 点的切平面的交集乃是一个 $(n-m)$–维的平面，亦即那个过 $\mathbf{x}_0$ 点而且和 $\{\nabla f_i\big|_{\mathbf{x}_0}, 1\leq i\leq m\}$ 都垂直的 $(n-m)$–维平面[通常把这种交截叫做超曲面 $\{f_i(\mathbf{x})=0, 1\leq i\leq m\}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 点横截 (transversal intersection)]。

(iii) 隐函数定理的几何意义就是证明了：若 m 个超曲面互相横截于 $\mathbf{x}_0$，则其交集在 $\mathbf{x}_0$ 点的邻近乃是一个 $(n-m)$–维曲面，而且可以选用适当的 $(n-m)$ 个坐标为参数，把其馀的 m 个坐标表达为前者的函数（亦即所证之隐函数）。

(iv) 往後我们称这种横截的交点 $\mathbf{x}_0$ 为这种多元多关系所描述的子集的<u>规则点</u> (regular point)，隐函数定理保证了规则点的局部具有上述简单的参数表达。其所用的 $(n-m)$ 个坐标也就可以作为所给子集在规则点邻近的数理分析的自变元。

2.2 坐标变换

设 $\{f_i(\mathbf{x}), 1\leq i\leq n\}$ 是 n 个一阶连续可微的 n 元函数。若

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\bigg|_{\mathbf{x}} \neq 0$$

对于所有 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$ 之点皆成立，令

$$y_i = f_i(\mathbf{x}), \quad 1 \le i \le n$$

而且把它们看成下述 n 个 $2n$ 变元之方程组，即

$$F_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i = 0, \quad 1 \le i \le n$$

则有

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \left.\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|_{\mathbf{x}} \neq 0$$

由隐函数定理，可知唯一存在 $\mathbf{y}$ 的函数组

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{y})$$

使得 $$F_i(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,y_1,\ldots,y_n) = f_i(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) - y_i \equiv 0$$

亦即

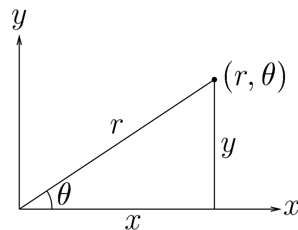
$$\{x_i = \varphi_i(\mathbf{y})\} \longleftrightarrow \{y_i = f_i(\mathbf{x})\}$$

是相互确定的互逆函数关系。再者，不难验证

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{\mathbf{y}} = \left\{\left.\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|_{\mathbf{x}}\right\}^{-1}$$

【例一】：极坐标 (r,θ) 与笛氏坐标 (x,y)

$$\begin{aligned}
&x = r\cos\theta \\
&y = r\sin\theta \\
&dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\
&dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \\
&\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r
\end{aligned}$$



[图 2–1]

【例二】：球面坐标 (ρ,θ,φ) 与笛氏坐标 (x,y,z)

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

[图 2–2]

【例三】：设 $(u_1,\ldots,u_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ 和 $(x_1,\ldots,x_n)$ 是三种可以相互变换的局部坐标系，亦即

$$\frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \neq 0, \quad \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$$

（在某一邻域中到处不为零），则有

$$\frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$$

验证：

$$\begin{aligned} du_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} dy_j \\ dy_j &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} dx_k \end{aligned}$$

将 dy_j 的表式代入 du_i 的表式中，即得

$$du_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right) dx_k$$

由此即有

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}\right) \cdot \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)$$

所以由行列式乘法公式即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right| &= \left|\frac{\partial u_i}{\partial y_j}\right| \cdot \left|\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right| \\ &= \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\end{aligned}$$

2.3 极大，极小的微分条件式

设 $y = f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 点是局部极大（或极小），即

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \quad （或\ f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x})）$$

对于所有 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$（适当小的正数）皆成立。若 $f(\mathbf{x})$ 在上述邻域一阶可微，则显然有下述必要条件，即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

再者，若 $f(\mathbf{x})$ 在上述邻域二阶可微而且二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\xi_i\xi_j$$

是正定（或负定）的，即在 ξ_i 不全为零时恒取正（或负）值，则 $f(\mathbf{x}_0)$ 乃是局部极小（或极大）值。

上述简明的结果乃是 Taylor 均值定理的直接推论。

现在让我们进而研究一个一阶连续可微函数 $y = f(\mathbf{x})$ 其中变元 $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ 在 $\mathbf{x}_0$ 邻近并非自由变动，而是局限于某些条件式之下的极大、极小的必要条件。设所给的附加条件式是

$$(*) \qquad g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

而且存在 $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ 使得

$$\left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_m})}\right|_{\mathbf{x}_0}\neq 0 \quad \text{（为了便于叙述，不妨设}\left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right|_{\mathbf{x}_0}\neq 0\text{）}$$

一种自然的想法是用隐函数定理把上述问题归于原先那种不含有局限条件的情形，其具体做法如下：

令 $x_i=\varphi_i(x_{m+1},\dots,x_n)$, $1\le i\le m$, 是由局限条件式 $\{g_i(\mathbf{x})=0,1\le i\le m\}$ 所唯一确定的隐函数。用来代入 $y=f(\mathbf{x})$，即得

$$y=f(\varphi_1,\dots,\varphi_m,x_{m+1},\dots,x_n)=F(x_{m+1},\dots,x_n)$$

它乃是 $\widetilde{\mathbf{x}}=(x_{m+1},\dots,x_n)$ 在 $\widetilde{\mathbf{x}}_0=(x_{m+1,0},\dots,x_{n,0})$ 邻近 $(n-m)$ 个自由变元的函数，所以它在 $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ 点取极大或极小的必要条件乃是

$$(\star_0)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)=0,\quad m+1\le j\le n$$

亦即

$$(\star)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)+\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=0,\quad m+1\le j\le n$$

而其中 $\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0),1\le i\le m\}$ 则是下述线性方程组所唯一确定者也，即

$$(\star')\qquad \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)+\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=0,\quad 1\le k\le m$$

让我们先来看一下 $m=1$ 的情形，则 $(\star')$ 即为

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)+\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=0$$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)=-\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\Big/\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)$$

以它代入 $(\star)$ 即为

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\Big/\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)+\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=0,\quad 2\le j\le n$$

Lagrange 指出，上述代数条件式可以想成是下述含有参数 λ 的代数方程组

$$(\#)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=0,\quad 1\leq i\leq n$$

用第一式解得 λ，代入其馀 $(n-1)$ 式者也。其实，在一般的情形，我们可以引入 m 个参数 $\{\lambda_i, 1\leq i\leq m\}$，则下述方程组

$$(\#)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(f+\lambda_1 g_1+\ldots+\lambda_m g_m)=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_i}=0,\quad 1\leq i\leq n$$

可以用前面 m 式解得 $\{\lambda_k, 1\leq k\leq m\}$（因为 $\dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}(\mathbf{x}_0)\neq 0$），代入其馀 $(n-m)$ 式之所得也就是 $(\star)$。亦即方程组 $(\#)$ 和方程组 $\{(\star),(\star')\}$ 其实是代数等价者也。这也就是 Lagrange's method of multipliers. 兹总结如下：

【定理】(Lagrange)：设 $f(\mathbf{x})$ 和 $\{g_k(\mathbf{x}), 1\leq k\leq m\}$ 都是一阶连续可微，而且存在 $(i_1,\ldots,i_m)$ 使得

$$\frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})}(\mathbf{x}_0)\neq 0$$

则 $f(\mathbf{x})$ 在局限条件 $\{g_k(\mathbf{x})=0, 1\leq k\leq m\}$ 之下，在 $\mathbf{x}_0$ 点取极大或极小值的必要条件是

$$(\#)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=0, & 1\leq i\leq n\\ g_k(\mathbf{x}_0)=0 & 1\leq k\leq m\end{cases}$$

其中 $\{\lambda_k, 1\leq k\leq m\}$ 是待定参数。

[一般来说，上述含有待定参数的条件式 $(\#)$ 总是比原先用隐函数的想法所得者 $\{(\star),(\star')\}$ 要来得简朴。]

下述是它的一个简单但是具有基本重要性的应用。

【例子】：设 (a_{ij}) 是一个对称方阵，亦即 $a_{ij}=a_{ji}$。令

$$f(\mathbf{x}) = (x_1,\ldots,x_n)\big(a_{ij}\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$
$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$$

则 $f(\mathbf{x})$ 在 $g(\mathbf{x})=0$ 的局限条件之下的极值问题的 Lagrange 必要条件式乃是

$$(\#)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f-\lambda g) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})x_j = \ell_i(\mathbf{x}) = 0, \quad 1\le i\le n \\ \sum x_i^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

其中 δ_{ij} 在 $i\neq j$ 时为零，$i=j$ 时为 1，而 λ 则是一个待定参数。因为 $\{(\#)_i, 1\le i\le n\}$ 是齐线性的，所以只有在其系数行列式 $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$ 时，才能有非零解，而 $(\#)_{n+1}$ 显然要求 $\mathbf{x}\neq 0$。由此可见方程组 $(\#)$ 中的待定参数 λ 必须是方阵 (a_{ij}) 的特徵值，亦即

$$|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = 0$$

的根。再者，设 λ 是一个特徵值，$\mathbf{x}_0$ 是它的一个单位长特徵向量，亦即

$$\begin{cases} \ell_i(\mathbf{x}_0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})x_{j,0} = 0 \\ |\mathbf{x}_0|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{j,0}^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_{i,0}\ell_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_{i,0}x_{j,0} - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_{i,0}^2 = 0$$
$$\Rightarrow f(\mathbf{x}_0) = \lambda$$

由此可见 $f(\mathbf{x})$ 在单位超球面上的极大（或极小）值乃是 (a_{ij}) 的特徵值中的极大（或极小）者是也！而其所相应的单位特徵向量也就是单位超球面上达成 $f(\mathbf{x}_0)$ 极大（或极小） 值之点。

【推论】：二次型 $Q(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定（或负定，或不定）的充要条件是其特徵值都是正的（或负的，或有正、有负的）。

【习题】：求解下列有局限条件的极值问题：

(1) 求解下列有局限条件的极值问题：

   (i) $f(x,y)=x^2+y^2$, 条件：$x^2+4y^2=4$

   (ii) $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$, 条件：$\sum_{i=1}^{n}x_i^p-1=0,\ p\geq 1$

(2) 试用 (1)(ii) 之结果，证明当 $a_i, b_i, 1\leq i\leq n$, 为非负实数，$p,q\geq 1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时有

   (i) $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

   (ii) $\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}$

第 三 章

高维勾股定理与 Grassmann 代数

在多元、多关系数理体系的分析中，我们要用到各种各样的积分如线积分、面积分、体积分、多重积分等等，以及它们之间的相互关联。在它们的研讨中，当然要用到各种维数的定向体积 (oriented volumes of various dimensions) 的有效计算与相互关联。因此，高维度量几何中的基本定理——高维勾股定理——和把它们妥为组织而成的代数体系——Grassmann 代数——乃是多元积分理论的几何基础和精简好用的代数工具。

在各种各样的几何量中，长度乃是一切的基本，其他如角度、面积、体积等等都可以由所涉及的长度加以确定和计算。其实，这也就是定量几何学的基础理论的主要部分。在基础几何学的第五章中，我们把欧氏度量几何的基础理论，精简、优化成向量代数来加以表达，把几何的基本定理转化成向量运算的运算律。例如关于长度、角度的基本定理——勾股定理——就转化、优化成简洁、有力的内积分配律。本章将把该章对于三维欧氏几何的研讨，推广到一般的 n 维欧氏几何。

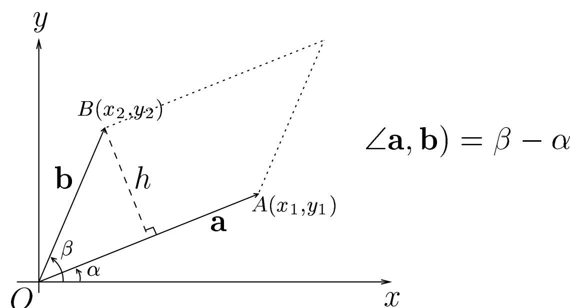
3.1 向量代数与平行体的有向体积

开宗明义，一个 n 维欧氏空间中的平移构成一个 $\mathbb{R}$ 上的 n–维向量空间。其长度同样的满足勾股定理，所以也可以同样地定义内积，满足同样的运算律。本节将以这样一个具有内积的 $\mathbb{R}$ 上 n 维向量空间为出发点，研讨各维平行体的有向体积 (oriented volume)。

3.1.1 平面的定向与平行四边形的有向面积

一条直线有两个相反的方向，所以其定向乃是取定其一为正向，而一个有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的有向长度的正负则取决于它的方向和取定之正向的同异。在二维的情形，一个平面上有两个相反的角度的转向，所以其定向乃是取定其一为正的转向，而一个由其上两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张的平行四边形 $//(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 的有向面积的正、负则取决于由 $\mathbf{a}$ 转向 $\mathbf{b}$ 的角度 $\angle\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 之正负。如 [图 3–1] 所示，$//(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 的有向面积：

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\angle\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{3.1}$$



[图 3–1]

再者，在平面上选取正向的笛氏坐标系，令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ 的坐标（亦即 A, B 的坐标）分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则有

$$x_1 = |\mathbf{a}|\cos\alpha, \quad y_1 = |\mathbf{a}|\sin\alpha$$

$$x_2 = |\mathbf{b}|\cos\beta, \quad y_2 = |\mathbf{b}|\sin\beta$$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha) \\ &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \\ &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3.2}$$

令 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 分别是 x, y 方向的单位长向量，则 $//(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ 当然等于 1。所以上述公式还可以改写成下述形式，即

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot A(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_y \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_y \end{vmatrix} \tag{3.2'}$$

上述公式是否可以推广成一般情形呢？亦即

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot A(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \stackrel{?}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

此事不难再用 (3.2)–式结合行列式的乘法公式验证之，即

$$
\begin{aligned}
A(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot A(\mathbf{c},\mathbf{d}) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1u_1 + y_1v_1 & x_1u_2 + y_1v_2 \\ x_2u_1 + y_2v_1 & x_2u_2 + y_2v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

3.1.2 三维空间的定向和平行六面体的有向体积

接著让我们进而探讨三维空间应该如何定向？易见在平面上两个同向的有序正交基总可以由其一旋转到其另一，但是异向的两个则不然。设 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 和 $\{\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'\}$ 是空间的任给两组有序正交基。易见我们可以通过一个以和 $\mathbf{a},\mathbf{a}'$ 都垂直的轴的适当旋转 (rotation) R_1 使得 $R_1(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$。因此 $\{R_1(\mathbf{b}), R_1(\mathbf{c})\}$ 和 $\{\mathbf{b}',\mathbf{c}'\}$ 乃是位于和 $\mathbf{a}'$ 垂直的平面中的两组有序正交基。若它们同向，则有一个以 $\mathbf{a}'$ 为轴的适当旋转 R_2 使得

$$R_2R_1(\mathbf{a}) = R_2(\mathbf{a}') = \mathbf{a}', \quad R_2R_1(\mathbf{b}) = \mathbf{b}', \quad R_2R_1(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$$

亦即有旋转的组合 R_2R_1，它把 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 分别映射到 $\{\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'\}$。由上述讨论不难看到，空间两组同是右手型（或同是左手型）的正交基是可以有旋转的组合相互映射的。但是各别是左、右手型的两组正交基则无法有这种相互映射。由此可见，三维空间的定向乃是在上述二类有序正交基中取定其一为正向者是也（例如通常约定取右手型者为正向）。

同样地，有序的三个线性无关的向量组也可以分成左手型和右手型，所以对于业已选定何者为正向型之後，一个有序的三个向量 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 所张的平行六面体（且以 $//(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 记之）的有向体积的正负也就取决于它是否和选定者同属一型。我们将以符号 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 表示 $//(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 的有向体积 (oriented volume)。不难验证 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 具有下述几何性质：

1. 当 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 是正向正交基时，$V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 1$；

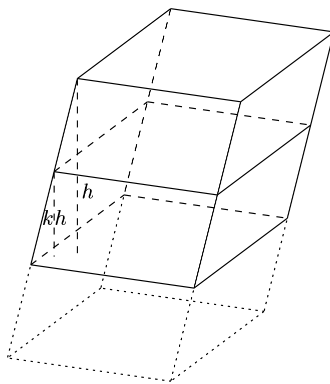
2. $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 是其向量变元的斜对称函数；

3. $V(k\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = kV(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$；

4. $V(\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{c})=V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$。

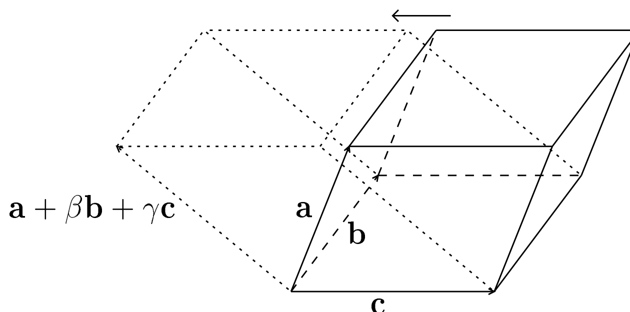
性质 1 是显然的。性质 2 则是因为定向的正负在两个向量变元对换下变为其反向。

如 [图 3–2] 所示，在 $k>0$（或 $k<0$）时 $\{k\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 和 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 同向（或异向）；而且 $//(k\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 和 $//(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 具有同样的底面（亦即 $//(\mathbf{b},\mathbf{c})$）而前者的高乃是後者的 $|k|$–倍。



[图 3–2]

再者，如 [图 3–3] 所示，$//(\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 和 $//(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 的底面都是 $//(\mathbf{b},\mathbf{c})$，而前者的顶面乃是将後者的顶面在两者所共在的平面作一滑动，所以两者是同高而且同向者也。这也就说明了性质 4（通常把上述变形叫做斜切 (shearing)，所以性质 4 也就叫做<u>斜切不变性</u> (shearing invariance)）。



[图 3–3]

[注]：在基础几何学的第五章中，我们业已用 ×–积说明了 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$。但是在这里我们将直接用上述有向体积的基本

性质去证明 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$。因为这种证法可以直接推广到高维，证明高维有向体积也都是高阶行列式。其实，我们所要论证之点，仅仅是下列引理。

【引理 1】：$V(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})=V(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})+V(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$

证明：不妨设 $\mathbf{b},\mathbf{c}$ 线性无关。因为在 $\mathbf{b},\mathbf{c}$ 线性相关的情形，上式三项都显然等于 0，所以 $0=0+0$ 当然成立。

令 $\mathbf{e}$ 是垂直于 $/\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$ 的单位法向量，$\{\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 组成三维空间的一组基底。令

$$\mathbf{a}_1=\alpha_1\mathbf{e}+\beta_1\mathbf{b}+\gamma_1\mathbf{c},\quad \mathbf{a}_2=\alpha_2\mathbf{e}+\beta_2\mathbf{b}+\gamma_2\mathbf{c}$$

由性质 3, 4 即有

$$\begin{aligned}V(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})&=V((\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\alpha_1+\alpha_2)V(\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c})\\V(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})&=V(\alpha_1\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c})=\alpha_1V(\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c})\\V(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})&=V(\alpha_2\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c})=\alpha_2V(\mathbf{e},\mathbf{b},\mathbf{c})\end{aligned}$$

由此即得

$$V(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})=V(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})+V(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$

【推论 1】：$V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot\det(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$

[因为 $V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 业已满足 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 的所有特徵性质。]

【推论 2】：$V(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)\cdot V(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1&\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2&\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_3\\\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1&\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2&\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_3\\\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{b}_1&\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{b}_2&\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{b}_3\end{vmatrix}$$

现在让我们再来研讨一般的 k–维子空间中的定向和 k–维平行体的有向体积。由上面对于一、二、三维的讨论，我们可以看出，一个欧氏空间之中的「定向」和其保长变换之间的关系如下，即：

(i) 定向在最为基本的反射对称之下互换，所以定向乃是在那种由偶数 个反射对称组合而成的保长变换之下保持者也；

(ii) 因为任何两个反射对称的组合不是平移就是旋转，所以易见由所有偶数个反射对称之复合所构成之子集（子群）乃是连通的 (connected);

(iii) 一个 k–维欧氏空间中的所有正交坐标系和其中所有正交标架 (orthonormal frames) 显然成一、一对应。两个正交坐标系（或正交标架）之间存在著唯一的保长变换将其一映射到其另一。若这个唯一存在的保长变换乃是偶数（或奇数）个反射对称之复合，则这两个正交坐标系（亦即正交标架）具有同样的（相异的）定向。

(iv) 不难验证（用归纳法），任给一个空间非正交的标架都可以用适当的斜切变形 (shearing deformations) 把它变形成互相正交者，然後只要把它们逐一乘以其长度之倒数，即可变形成一个正交标架。定向 (orientation) 乃是在上述这种变形之下保持者也。

总结上述几点，可见一个 k–维欧氏空间的定向，乃是在其上正交标架的两个等价类之中取定其一为正向，其另一则为负向。再者，非正交的标架之定向乃是等同于它在 (iv) 中描述之变形所得的正交标架之定向。由此即定义了一个定向的 k–维欧氏空间之中的 k–维平行体 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 的有向体积 (oriented k-dim volume)，我们将以 $V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 记之。再者，这样定义的 $V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 显然也同样具有一如在三维情形的四个基本性质，及其推论——[引理 1]。所以也有下述重要公式，即

【定理 3.1】：一个定向 k–维欧氏空间中的 k–维平行体 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 的有向体积 $V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 具有下述基本公式，即

$$V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)=\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k) \quad (\text{亦即 } \left|\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}_j\right|)$$
$$V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)\cdot V(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)=\left|\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j\right|$$

其中 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k\}$ 是一个任选正向正交标架。

上述[定理 3.1]业已在 $k=1,2,3$ 时详为说明，其归纳论证则留作习题。

3.2 向量内积与勾股定理的高维推广

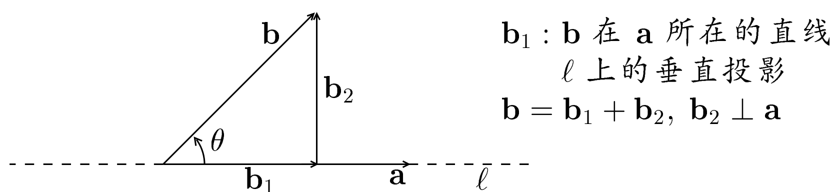
向量内积和勾股定理是密切相关的。内积的定义植根于勾股定理，而内积分配律则是勾股定理的优化形式；它是用向量代数研讨涉及长度、夹角的各种各样问题的至精至简。本节将探讨向量内积和勾股定

理在高维度量（亦即面积，体积和高维体积）上的推广。首先，让我们再来分析一下向量内积的定义及其几何本质。

我们在基础几何学的第五章讨论过，向量内积乃是从下述三角形三边边长的特定函数的深入分析来引入的：

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\left\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\right\}$$

亦即发现它乃是一个美好的双线性函数，所以顺理成章地把它定义为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的内积，则其双线性就自然转化成简洁易用的内积分配律了。再者，如 [图 3–4] 所示，将分配律和垂直投影相结合，即得向量内积的下述几何内含，即



[图 3–4]

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

其实，我们也可以采用上述几何内含作为内积的定义式，然後再用垂直投影的「线性」来推导如此定义的内积的分配律。

总之，内积和垂直投影乃是两个密切相关的事物：内积的分配律相当于垂直投影的线性，由其一即可推导其另一。回顾在该章证明 $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的双线性中，垂直投影在广义勾股定理的证明中扮演重要角色，但是并不需要用到垂直投影的线性。所以这种处理方式的好处是：它不但不依赖于垂直投影的线性，而且也给垂直投影的线性这个欧氏几何的要点提供了简洁的证明。这也就是采取这种处理方式的好处和原由。

【分析】：

(i) 当我们进而探索如何把内积推广到高维的情形，首先得认识到高维的情形和一维的情形具有下述两点差别：其一是对于两个给定 k–维平行体 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 是无法构造另一个 k–维平行体，可以自然地定义为它们的和 (sum)。由此可见，原先一维向量采用

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := \frac{1}{2}\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\}$ 来定义其内积的做法乃是此路不通者也。其二是垂直投影的线性业已由一维向量内积的分配律推导而得，在此正好把它用来作为定义高维向量内积的有力工具。基于上述两点，很自然要设法把 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$ 这种定义方式推广到高维。

(ii) 有鉴于 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$ 的实质内含乃是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}_1$ 这两个共线的有向线段的有向长度的乘积，其中 $\mathbf{b}_1$ 则是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 所在的直线上的垂直投影（参看 [图 3–4]）。设 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 是空间中两个给定的平行四边形。若它们共在某一平面 Π 之内，我们可以取定 Π 上的定向，则有两者的有向面积的乘积公式

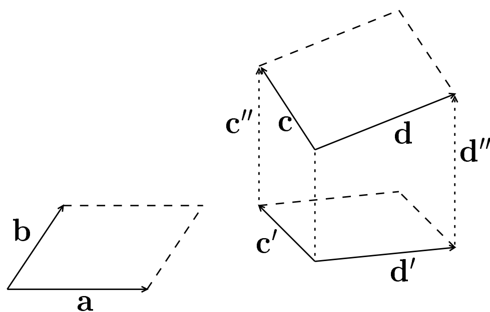
$$A(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot A(\mathbf{c},\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

它是和 Π 上定向的选取无关的。在两者不共面的情形，令 $\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{d}'$ 分别是 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 在 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 所在的平面 Π 上的垂直投影。如 [图 3–5] 所示，

$\mathbf{c} = \mathbf{c}' + \mathbf{c}'', \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}' + \mathbf{d}''$

$//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 和 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 共在 Π 之内

$\mathbf{c}''$ 和 $\mathbf{d}''$ 则和 Π 垂直，亦即 $\mathbf{c}''\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}''\cdot\mathbf{b} = \mathbf{d}''\cdot\mathbf{a} = \mathbf{d}''\cdot\mathbf{b} = 0$



[图 3–5]

由此可见共面的 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 的有向面积的乘积还是可以用同样的公式表达，即

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}' & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}' \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}' & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

因为有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}' + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}'' = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}'$ 等等。

由此可见，我们应该把空间中两个平行四边形 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 的内积定义为共面的 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 的有向平面之乘积，其中 $//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$ 乃是 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 在 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 所在的平面上的垂直投影，将以符号 $<//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{c},\mathbf{d})>$ 记之。则有内积公式：

$$<//(\mathbf{a},\mathbf{b}),//(\mathbf{c},\mathbf{d})> = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

它是对于四个向量变元都是线性的！

(iii) 我们可以把上述定义同样地推广到 k–维的情形，即有

【定义】：设 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 是两个任给的 k–维平行体，Π 是 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 所在的 k–维子空间，$\mathbf{b}_i'$ 分别是 $\mathbf{b}_i$ 在 Π 上的垂直投影，$1\le i\le k$。则 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1',\ldots,\mathbf{b}_k')$ 乃是共在一个 k–维子空间 Π 上的 k–维平行体，两者的有向 k–维体积的乘积其实是和 Π 上的定向选取无关的（因为负负得正），定义为 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 的内积，将以符号 $<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k),//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)>$ 记之。

将上述内积的定义和[定理 3.1]相结合，即有

【定理 3.2】：$<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k),//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)> = \det(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j)$

$$\text{（亦即}\quad \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_k \end{vmatrix} \quad\text{）}$$

证明：由定义 $<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k),//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)>$ 等于共在 k–维子空间 Π 上的 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1',\ldots,\mathbf{b}_k')$ 的有向 k–维体积之乘积，其 $\mathbf{b}_j'$ 分别是 $\mathbf{b}_j$ 在 Π 上的垂直投影。由[定理 3.1]即有

$$<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k),//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)> = \det(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j')$$

再者，由于 $\mathbf{b}_j'$ 乃是 $\mathbf{b}_j$ 在 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 所在的 k–维子空间 Π 上的垂直投影，即有

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j' + \mathbf{b}_j'',\quad \mathbf{b}_j' \text{ 在 } \Pi \text{ 上而 } \mathbf{b}_j''\perp\Pi \\ \Rightarrow\ &\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j'' = 0 \quad \text{对于所有 } i,j \text{ 皆成立} \\ \Rightarrow\ &\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i\cdot(\mathbf{b}_j'+\mathbf{b}_j'') = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j' + \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j'' = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j' \end{aligned}$$

对于所有 $1 \le i, j \le k$ 皆成立。所以

$$<//(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k), //(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)> = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}'_j) = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j) \qquad \square$$

[注]：上述公式的右侧乃是 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ 的多线性函数，而且对于 $\{\mathbf{a}_i\}$ 和 $\{\mathbf{b}_i\}$ 各别是斜对称的；乃是十分简洁、易算、好用者也。下面所讨论者，实乃上述多线性和其斜对称性的直接应用，亦即直截了当的展开计算是也。且先以我们身在其中的三维空间中的二维内积为例：

设 (x_1, x_2, x_3) 是空间中一个选定的正向笛氏坐标系，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是其相应的正交标架，则有

$$<//(\mathbf{a}, \mathbf{b}), //(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)> = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2 \end{vmatrix}$$
$$<//(\mathbf{a}, \mathbf{b}), //(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)> = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$
$$<//(\mathbf{a}, \mathbf{b}), //(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)> = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1 \end{vmatrix}$$

由内积的定义，上述三者分别就是 $//(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 在三个坐标面上的垂直投影对于分别以 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 和 $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ 为其上正向的有向面积。

令 a_i（或 b_i, c_i, d_i）分别是向量 $\mathbf{a}$（或 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$）和 $\mathbf{e}_i$ 的内积，亦即

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 + d_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

【推论 1】：$<//(\mathbf{a}, \mathbf{b}), //(\mathbf{c}, \mathbf{d})>$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ d_3 & d_1 \end{vmatrix}$$

【推论 1′】：$<//(\mathbf{a}, \mathbf{b}), //(\mathbf{a}, \mathbf{b})>$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2$$

[注]：这也就是二维（亦即面积）的勾股定理。

证明：由二维内积的多线性和各别的斜对称性，对于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 这四个向量变元逐一展开，即有

$$< /\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}), /\!/(\mathbf{c},\mathbf{d}) > = \sum_{1\le i_1,i_2,j_1,j_2\le 3} < /\!/(a_{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, b_{i_2}\mathbf{e}_{i_2}), (c_{j_1}\mathbf{e}_{j_1}, d_{j_2}\mathbf{e}_{j_2}) >$$

易见在上述各项中当 $i_1 = i_2$ 或 $j_1 = j_2$ 时显然为 0，而且在 $\{i_1, i_2\}$ 和 $\{j_1, j_2\}$ 相异时也显然为 0（因为 $/\!/(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2})$ 和 $/\!/(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2})$ 乃是互相垂直者也）。略去上述显然为 0 之项，不难验算所剩之项等于

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} < /\!/(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2), /\!/(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) > \\
+&\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} < /\!/(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3), /\!/(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) > \\
+&\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ d_3 & d_1 \end{vmatrix} < /\!/(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1), /\!/(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1) >
\end{aligned}$$

其实，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 乃是四个向量变元，在取定坐标系中，它们各别的坐标（即 $\{a_i, b_i, c_i, d_i,\ 1 \le i \le 3\}$）乃是 12 个自变元，可以把它们排列成一个 3×4 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

而

$$< /\!/(\mathbf{a},\mathbf{b}), /\!/(\mathbf{c},\mathbf{d}) > = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

则是一个它们的 4 次齐次多项式，对于每一列是线性的，而且对于 $\{1,2\}$–列和 $\{3,4\}$–列是斜对称的。由上面解说可见这个 4 次多项式可以自然地分解成三个多项式之和，各别只含有其中两行的那 8 个变元。由此可见，我们只要把其中一行的 4 个变元皆以 0 代入，即可得出那个只含有其馀两行者。例如令第三行为 0，则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 都是位于 $(1,2)$–坐标面之中，直接由内积的定义即得其值为 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$。

□

【定理 3.3】（高维勾股定理）：设 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 是 n–维欧氏空间的两个任给 k–维平行体，$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 是其中任选的一组正向正交基。令

$$a_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}_j,\quad b_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{b}_j,\quad 1\le i\le n,\ 1\le j\le k$$

则有

$$\begin{aligned}
&<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k),//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)>\\
=&\sum_{1\le i_l<\ldots<i_k\le n}<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k),//(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k})>\cdot<//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k),//(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k})>\\
=&\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\begin{vmatrix}a_{i_1,1}&\ldots&a_{i_1,k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i_k,1}&\ldots&a_{i_k,k}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{i_1,1}&\ldots&b_{i_1,k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{i_k,1}&\ldots&b_{i_k,k}\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

证明：由[定理 3.2]可见上述 k–维内积乃是 $2k$ 个向量变元 $\{\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_j,\ 1\le j\le k\}$ 的多线性函数，而且它对于 $\{\mathbf{a}_j\}$ 和 $\{\mathbf{b}_j\}$ 都是斜对称的。在选用正向正交坐标系 $\{\mathbf{e}_i\}$ 之下，它就可以表达成 $\{a_{ij},b_{ij};\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le k\}$ 这样 $2kn$ 个自变元的 $2k$ 次齐次多项式，它们可编组成一个 $n\times 2k$（或两个 $n\times k$）的矩阵，即

$$\left(a_{ij},b_{ij}\right)\quad(\text{或 }\left(a_{ij}\right)\text{ 和 }\left(b_{ij}\right))$$

用其多线性展开，再用 $\{\mathbf{e}_i\}$ 的正交性可见

$$<//(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k}),//(\mathbf{e}_{i'_1},\ldots,\mathbf{e}_{i'_k})>$$

在足标子集 $\{i_1,\ldots,i_k\}$ 和 $\{i'_1,\ldots,i'_k\}$ 不相同时恒为 0。由此即得上述 $2k$ 次齐次多项式的下述分解，亦即它乃是 $\binom{n}{k}$ 个多项式 $\{P_{i_1,\ldots,i_k};\ 1\le i_1<\ldots<i_k\le n\}$ 之和，其中 $P_{i_1,\ldots,i_k}$ 只含有 $\{i_1,\ldots,i_k\}$ 这 k 行的变元。由此可见，当我们把其他 $(n-k)$ 行的所有变元都代之以 0 时，即得

$$P_{i_1,\ldots,i_k}=<//(\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_k),//(\mathbf{b}'_1,\ldots,\mathbf{b}'_k)>$$

其中 $\mathbf{a}'_j$ 和 $\mathbf{b}'_j$, $1 \le j \le k$, 乃是 $\mathbf{a}_j$ 和 $\mathbf{b}_j$ 在 $\{\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ 所张的 k–维坐标面上的垂直投影是也。所以由 k–维内积的定义可见

$$\begin{aligned}
&P_{i_1,\ldots,i_k}\\
&= <//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k), //(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k})> \cdot <//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k), //(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k})>\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \begin{vmatrix} a_{i_1,1} & \ldots & a_{i_1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,1} & \ldots & a_{i_k,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{i_1,1} & \ldots & b_{i_1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k,1} & \ldots & b_{i_k,k} \end{vmatrix} \qquad \square
\end{aligned}$$

[注]：(i) 在 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 相同的特殊情形，即有 $//(\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a}_k)$ 的 k–维体积之平方等于它在各个 k–维坐标面（共有 $\binom{n}{k}$ 个）的垂直投影的 k–维体积平方之总和，这也就是 k–维体积的勾股定理。而[定理 3.3]本身则是高维勾股定理更为普遍好用的推广。

(ii) 我们可以把 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 在每个 k–维坐标面（共有 $\binom{n}{k}$ 个）上之垂直投影的有向 k–维体积看做它的坐标（一如把 $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}$ 看做 $\mathbf{a}$ 的第 i 个坐标），则上述定理所证者，乃是 k–维平行体的内积也具有和常用的向量内积坐标化公式同样形式的坐标化公式。

(iii) 在一维的情形，我们有下述重要的 Schwarz 不等式，即

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \le (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})$$

而且等号当且仅当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 线性相关时才成立。下述推论乃是 Schwarz 不等式在高维内积的推广。

【推论】：$<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k), //(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)>^2$

$$\le <//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k), //(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)> \cdot <(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k), //(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)>$$

而且等号当且仅当 $<\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k> = <\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k>$ 才成立。

<u>证明</u>：令 $1 \le \alpha \le N = \binom{n}{k}$ 为标记 $\binom{n}{k}$ 个 k–维坐标面的足标，ξ_α 和 η_α 分别是 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 在第 α 个 k–维坐标面的

的垂直投影的有向 k–维体积。由[定理 3.3]即有

$$
\begin{aligned}
<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k), //(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)> &= \sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha \eta_\alpha \\
<//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k), //(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)> &= \sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha^2 \\
<//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k), //(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)> &= \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^2
\end{aligned}
$$

由此可见，上式不等式乃是原来的 Schwarz 不等式，即

$$
\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha \eta_\alpha\right)^2 \le \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha^2\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^2\right)
$$

的直接结论，而且等号只有在 $\{\xi_\alpha\}$ 和 $\{\eta_\alpha\}$ 成比例时才成立。在这种情形，我们可以选用正交坐标系使得 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 位于第一个坐标面之内，则 $\{\xi_\alpha\}$ 中只有 ξ_1 不为 0，因此 $\{\eta_\alpha\}$ 中也只有 η_1 不为 0，亦即 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 也位于第一个坐标面之内。所以等号只有在两者「平行」才能成立，亦即 $<\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k> = <\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k>$，反之亦然。因为在两者平行的情形，即有线性关系

$$
\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\mathbf{a}_j, \quad 1 \le i \le k
$$

由垂直投影的线性则有它们在任一 k–维坐标面上的垂直投影 $\{\mathbf{b}_i'\}$ 和 $\{\mathbf{a}_j'\}$ 也有同样的线性关系，亦即

$$
\mathbf{b}_i' = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\mathbf{a}_j' \quad \Rightarrow \quad \eta_\alpha = \det(\beta_{ij}) \cdot \xi_\alpha, \quad 1 \le \alpha \le N \qquad \square
$$

[注]：在具有上述线性关系而且 $\det(\beta_{ij}) = 1$ 时，则称 $//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k)$ 平行而且等积。由此可见，两个 k–维平行体平行而且等积的充要条件乃是它们在 $\binom{n}{k}$ 个 k–维坐标面上的垂直投影都具有相等的有向 k–维体积，亦即 $\xi_\alpha = \eta_\alpha, 1 \le \alpha \le \binom{n}{k}$。

3.3 格氏代数 (Grassmann Algebra)

抽象化的基本想法是对于所要研讨的事物择其精要妥加组织，从而获得既精且简的体系，成为以简御繁，解答各种各样问题的有力工具。格氏代数乃是在度量几何的研讨上既精且简的基本工具。它就是把前两节研讨所得的度量几何学的精要：如定向面积，k–维平行体的内积和 k–维勾股定理等等再作妥加组织而得的代数体系；乃是高维度量几何，微分几何和多元微积分的有力基本工具。

【定义】：我们将先把互相平行等积的 k–维平行体等价类看做一种 k–维的有向几何量，称之谓 k-vector, 并以符号 $\mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k$ 表示包含 $//(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ 于其中的那个等价类，亦即

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k = \mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_k \\
\Leftrightarrow\ & //(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) \text{ 和 } //(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) \text{ 平行而且等积} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\mathbf{a}_j,\ 1 \le i \le k \text{ 而且 } \det(\beta_{ij}) = 1
\end{aligned}$$

<u>倍积之定义</u>：设 $//(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ 和 $//(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)$ 平行，而後者有向 k–维体积乃是前者的 λ 倍，亦即有

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\mathbf{a}_j, \quad 1 \le i \le k, \text{ 而且 } \det(\beta_{ij}) = \lambda$$

则定义 $\mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_k$ 为 $\mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k$ 之 λ 倍，以符号

$$\mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_k = \lambda \cdot \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k$$

记之。

<u>外积之定义</u>：当 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\ell\}$ 是线性无关时定义

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k) \wedge (\mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_\ell) = \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_\ell)$$

亦即将 $//(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\ell)$ 的等价类定义为 $//(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ 的等价类和 $//(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)$ 的等价类的外积。当 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\ell\}$ 是线性相关时则定义两者的外积为 0。

[注]：上述外积显然满足结合律。当 $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ 是线性无关时，$//(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ 所属之等价类则就是 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ 的外积；这也就是 $\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k$ 这个符号的原由。

<u>内积的定义</u>：$<\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k>:=\det(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j)$
[这也就是[定理 3.3]的重新表述。]

至此，所尚缺如者，就是如何恰当地定义 k-vectors $(k\geq 2)$ 之间的<u>加法</u>了。（也可以说，我们所要妥为组织的度量几何的代数体系，几乎业已水到渠成，只待再去妥为定义「加法」。）在我们探讨如何定义高维平行体之间的内积时，业已指出，在 $k=1$ 和 $k=2$ 的情形有一个根本的差别，那就是两个有向线段具有一个自然的有向线段作为两者之和；但是两个 k–维平行体 $(k\geq 2)$ 则<u>不再</u>具有一个自然的 k–维平行体可以作为两者之和。由此可见，在达成妥为定义「加法」之前，我们还得先下一番探讨分析的功夫。

【分析】：

(i) 假若要把 $\mathbf{c}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{c}_k$ 定义为 $\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k$ 之和，则它至少得满足下述内积分配律，即

$$\begin{aligned}&<\mathbf{c}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{c}_k,\mathbf{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{x}_k>\\=\;&<\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k,\mathbf{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{x}_k>+<\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k,\mathbf{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{x}_k>\end{aligned}$$

对于任给 $\mathbf{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{x}_k$ 恒成立。若用[定理 3.3]来验证上述必要条件，即为

$$\begin{aligned}&<\mathbf{c}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{c}_k,\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k}>\\=\;&<\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k,\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k}>+<\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k,\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k}>\end{aligned}$$

对于任给正交基 $\{\mathbf{e}_i\}$ 和 $1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n$ 恒成立。

(ii) 对于给定的两个 $\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k$，假如满足上述必要条件的 $\mathbf{c}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{c}_k$ 是存在的，则易证它是唯一存在的，而且应该顺理成章地把它定义为 $\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k$ 之和。

(iii) 由此可见，定义加法的症结所在是满足上述必要条件的 $\mathbf{c}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{c}_k$ 是否对于<u>任给</u>两个 $\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k$ 总是存在的呢？是耶？非耶？此事当然只有实事求是地去探讨。

(iv) 其实，这种「普遍存在性」是根本不成立的！例如在 $k=2, n=4$ 的情形，只要取 $\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2=\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1\wedge\mathbf{b}_2=\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4$ 就容易证明满足上述必要条件的 $\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2$ 是根本不存在的。其证明如下：

同反证法设其存在，令

$$\mathbf{c}_1=\sum_{i=1}^{4}a_i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{c}_2=\sum_{i=1}^{4}b_i\mathbf{e}_i$$

代入其所满足的必要条件式，即有

$$<\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2> = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow a_1:b_1\neq a_2:b_2$$

$$<\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2,\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4> = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow a_3:b_3\neq a_4:b_4$$

$$<\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3> = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_3:b_3 = a_1:b_1$$

$$<\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3> = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_3:b_3 = a_2:b_2$$

$$<\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_4> = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_4:b_4 = a_1:b_1$$

$$<\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_4> = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_4:b_4 = a_2:b_2$$

易见上述诸式是互相矛盾的，这也就证明了 $\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{c}_2$ 的不存在性！

总结上述几点实况的分析，摆在我们面前者只有两种处理方式：其一是有鉴于上述不存在性而根本放弃加法之引入，其二则是依然引入加法，但是在 $\mathbf{c}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{c}_k$ 不存在的情形把 $\mathbf{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{b}_k$ 的和想成一种比 k–维平行体更为广义的事物。显然，我们是不能接受前者的！岂能功败垂成，前功尽弃呢？是不？总之，我们是要义无反顾地去完成第二种处理方式的。其基本思想是把 k–维平行体的等价类所组成的集合，适当地扩充成一个具有内积的向量空间，当把内积限制到 k–维平行体的等价类时，它就是 §3.2 中所定义者也。显然这个我们所要寻求的内积空间包含下述 $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ 个 k–维平行体等价类：

$$\{\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k};\ 1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n\}$$

它们彼此正交而且都是单位长的。再者，它们的所有线性组合所构成的 $\binom{n}{k}$–维内积空间业已包括所有 k–维平行体的等价类了。由此可见，它就是所要寻求的适当而且自然的扩充，至此业已水到渠成，兹定义格氏代数如下：

【定义】：设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的一个 n–维内积空间。令 $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$, $\Lambda^1(V) = V$, $\Lambda^k(V)$, $2 \leq k \leq n$, 是包含所有 k–维平行体的等价类为其子集的 $\binom{n}{k}$–维内积空间。对于 V 中任给一组正交基 $\{\mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq n\}$, 则

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k},\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$

构成 $\Lambda^k(V)$ 的一组正交基。令

$$G(V) = \oplus \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$$

再者，定义 $G(V)$ 中的<u>外积</u>为下述双线性映射：

$$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{k+\ell}(V)$$

其限制于平行体的等价类的情形即为前述

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k) \wedge (\mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_\ell) := \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_\ell$$

[在 $k + \ell > n$ 或 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\ell\}$ 线性相关时，其外积为 0。]

第 四 章

外微分与多元积分

在单元微积分中，微分与积分分别起源于函数的变率与求和这两个定量型的基本性质，是各有所本，各有特色者；但是它们却是互逆的两种基本运算，而这种互逆关系也就是微积分基本定理。

本章将以前三章研讨之所得为基础，进而研讨在多元、多关系的数理分析中常见常用的各种各样积分，以及微积分基本定理在多元分析学中自然而且基本的推广。

4.1 多元函数的多重积分

4.1.1 多重积分的定义

让我们先来看一看下述最为简单的情形：设 $f(x_1, x_2)$ 是定义于一个「坐标矩形」D：

$$D = \{(x_1, x_2);\ a \leq x_1 \leq b,\ c \leq x_2 \leq d\}$$

上的连续函数。我们可以和单元相同地用二元阶梯函数去上、下夹逼 $f(x_1, x_2)$, 而且同样地用无限细分和比较原则去确定二重定积分

$$\int_D f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

的定义。其具体做法可以把 $a \le x_1 \le b$ 和 $c \le x_2 \le d$ 分别等分成 N–段, $N = 2^k$, 令其分点为：

$$
\begin{aligned}
a = a_0 < a_1 < \ldots < a_i < \ldots < a_N = b \\
c = c_0 < c_1 < \ldots < c_j < \ldots < c_N = d
\end{aligned}
$$

则纵线 $\{x_1 = a_i, 1 \le i \le N-1\}$ 和横线 $\{x_2 = c_j, 1 \le j \le N-1\}$ 就把 D 分割成 N^2 个小格，分别令其为 $\{D_{ij},\ 1 \le i, j \le N\}$。再者，令 M_{ij} 和 m_{ij} 分别是 $f(x_1, x_2)$ 在 D_{ij} 上所取之极大和极小值，而 $g_k(x_1, x_2)$ 和 $G_k(x_1, x_2)$ 则是分别在 D_{ij} 之内点取常数值 m_{ij} 和 M_{ij} 的阶梯函数，显然有

$$
g_k(x_1, x_2) \le f(x_1, x_2) \le G_k(x_1, x_2)
$$

对于 D 中任给 (x_1, x_2) 皆成立。所以由同样的比较原则即有

$$
\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_D g_k(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 & \le & \displaystyle\int_D f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 & \le & \displaystyle\int_D G_k(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 \\
\| & & & & \| \\
\displaystyle\frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \sum_{1 \le i,j \le N} m_{ij} & & & & \displaystyle\frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \sum_{1 \le i,j \le N} M_{ij}
\end{array}
$$

易见对于任给 $(x_1, x_2) \in D$, $\{g_k(x_1, x_2)\}$ 和 $\{G_k(x_1, x_2)\}$ 分别是 k 的递增和递减数列。再者，由 $f(x_1, x_2)$ 在 D 上的均匀连续性，可见当把 k 取得足够大时，所有 $(M_{ij} - m_{ij})$ 都可以小到足够小。所以在 $k \to \infty$ 时，即有

$$
\left(\int_D G_k(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 - \int_D g_k(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 \right) \to 0
$$

由此可见，上述左、右夹逼数列具有那个唯一被夹逼于其间的值，这也就是我们所要定义的二重定积分

$$
\int_D f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2
$$

它乃是左、右夹逼数列

$$
\left\{ \int_D g_k(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 \right\} \quad \text{和} \quad \left\{ \int_D G_k(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 \right\}
$$

的共同极限。再者，假如我们把上述左、右夹逼之和式作下述改写：

$$\frac{(b-a)(d-c)}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}m_{ij}\right) \quad 和 \quad \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}M_{ij}\right)$$

$$\left[或\ \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}m_{ij}\right) \quad 和 \quad \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}M_{ij}\right)\right]$$

就可以看出上述共同极限其实也等于下述逐次单元积分之所得，即有

$$\begin{aligned}\int_D f(x_1,x_2)dx_1\wedge dx_2 &= \int_c^d\left\{\int_a^b f(x_1,x_2)dx_1\right\}dx_2\\ (或\ =) &\int_a^b\left\{\int_c^d f(x_1,x_2)dx_2\right\}dx_1\end{aligned}$$

[注]：在上式右端的 $\int_a^b f(x_1,x_2)dx_1$（或 $\int_c^d f(x_1,x_2)dx_2$）所表达者，乃是把 x_2（或 x_1）暂且取定之後的单元函数之定积分（类似于「偏微分」中的处理方式），所以将称之为「偏积分」。

【例子】：

$$\begin{aligned}\int_D e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1\wedge dx_2 &= \int_c^d\left\{\int_a^b e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1\right\}dx_2\\ &= \int_c^d\left\{e^{-x_2^2}\int_a^b e^{-x_1^2}dx_1\right\}dx_2\\ &= \int_c^d e^{-x_2^2}dx_2\cdot\int_a^b e^{-x_1^2}dx_1\end{aligned}$$

再取 $a,c\to-\infty$ 而 $b,d\to+\infty$ 的极限，则有

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1\wedge dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1^2}dx_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_2^2}dx_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right]^2$$

接著让我们来讨论一般 n 个自变元的情形。设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个定义于下述 n–维坐标矩形 D 上的连续函数

$$D=\{(x_1,\ldots,x_n);\ a_i\le x_i\le b_i,\ 1\le i\le n\}$$

同样地，我们也可以把区间 $[a_i, b_i]$ N–等分 $(N = 2^k)$，从而把 n–维坐标矩形分割成 N^n 个 n–维小格

$$\{D_{i_1,\ldots,i_n};\ 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq N\}$$

令 $m_{i_1,\ldots,i_n}$ 和 $M_{i_1,\ldots,i_n}$ 分别是 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 在 $D_{i_1,\ldots,i_n}$ 上取值之极小与极大，而 $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $G_k(x_1, \ldots, x_n)$ 则是分别在 $D_{i_1,\ldots,i_n}$ 之内点取常数值 $m_{i_1,\ldots,i_n}$ 和 $M_{i_1,\ldots,i_n}$ 的 n 元阶梯函数。由同样的比较原则，即有

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{N^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq n} m_{i_1,\ldots,i_n} & = & \int_D g_k(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
& & \wedge| \\
& & \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
& & \wedge| \\
\frac{1}{N^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq n} M_{i_1,\ldots,i_n} & = & \int_D G_k(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n
\end{array}$$

再用 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 在 D 上的均匀连续性易证下述左、右夹逼数列

$$\left\{\int_D g_k(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\right\} \quad \text{和} \quad \left\{\int_D G_k(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\right\}$$

确定了 $\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ 为其唯一共同极限值。再者，我们也可以同样地把上述左、右夹逼之和式改写为

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{N^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \sum_{i_1=1}^{N}\left\{\sum_{i_2=1}^{N}\left\{\cdots\left\{\sum_{i_n=1}^{N} m_{i_1,\ldots,i_n}\right\}\cdots\right\}\right\} \\
\text{和}\quad \frac{1}{N^n}\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \sum_{i_1=1}^{N}\left\{\sum_{i_2=1}^{N}\left\{\cdots\left\{\sum_{i_n=1}^{N} M_{i_1,\ldots,i_n}\right\}\cdots\right\}\right\}
\end{array}$$

即可看到上述共同极限其实也等于下述逐次偏积分之所得，即有

$$\begin{aligned}
&\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left\{\cdots\left\{\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1}\left\{\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n\right\}\right\}\cdots\right\}
\end{aligned}$$

【例子】：

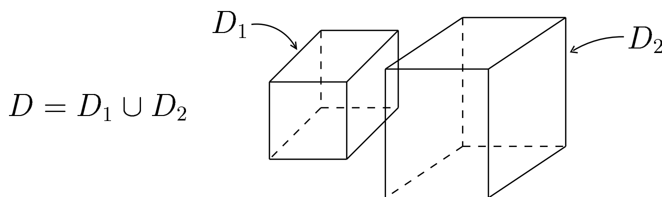
$$\begin{aligned}&\int_D e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\\&=\int_{a_1}^{b_1}e^{-x_1^2}dx_1\left\{\cdots\left\{\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}e^{-x_{n-1}^2}dx_{n-1}\left\{\int_{a_n}^{b_n}e^{-x_n^2}dx_n\right\}\right\}\cdots\right\}\\&=\prod_{i=1}^{n}\left\{\int_{a_i}^{b_i}e^{-x_i^2}dx_i\right\}\end{aligned}$$

再取 $a_i\to-\infty, b_i\to+\infty, 1\le i\le n,$ 的极限，则有

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_i^2}dx_i=\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right]^n$$

上述简明扼要的讨论，业已明确了一个多元连续函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 在一个 n–维坐标矩形上的多重积分之定义。接著让我们进而研讨如何把多重积分的区域 D 加以适当的推广。

首先，由于积分乃是求和之本质，若区域 D 乃是两个分别都是坐标矩形 D_1, D_2 彼此不相重叠 (non-overlapping) 的和集(如 [图 4–1] 所示):



[图 4–1]

则显然应该把 $f(\mathbf{x})$ 在 D 上的多重积分，直截了当地定义为它分别在 D_1 和 D_2 上的多重积分之和，亦即

$$\begin{aligned}&\int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\\:=&\int_{D_1}f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n+\int_{D_2}f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\end{aligned}$$

再者，若 D 能够分解成有限个 n–维坐标矩形 $\{D_i, 1\le i\le N\}$ 的和集，而且不含任何重叠，则 $f(\mathbf{x})$ 在 D 上的多重积分，就是它在 D_i 上的多

重积分的总和，亦即

$$\int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n=\sum_{i=1}^{N}\int_{D_i} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$$

其实，我们还可以师法古希腊即已想到、用到的穷尽原理 (principle of exhaustion)，把多重积分的区域推广到业已非常广泛的范畴。

设 Ω 是一个包含于 n–维坐标矩形 D 之内的区域，即有

$$\Omega\subseteq D=\{(x_1,\ldots,x_n);\ a_i\le x_i\le b_i,\ 1\le i\le n\}$$

分别将区间 $[a_i,b_i]$ N–等分, $N=2^k$, 从而将 D 分割成 N^n 个 n–维小格

$$\{D_{i_1,\ldots,i_n};\ 1\le i_1,\ldots,i_n\le N\}$$

令 $\overset{\vee}{\Omega}_k$（及 $\widehat{\Omega}_k$）分别是那些完全包含于 Ω 之内（及和 Ω 有非空之交集）的 n–维小格的和集，则显然有

$$\overset{\vee}{\Omega}_k\subset\overset{\vee}{\Omega}_{k+1}\subset\Omega\subset\widehat{\Omega}_{k+1}\subset\widehat{\Omega}_k$$

再者，若有

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{vol}_n(\overset{\vee}{\Omega}_k)=\lim_{k\to\infty}\mathrm{vol}_n(\widehat{\Omega}_k)$$

则上述共同极限就自然应该定义为 $\mathrm{vol}_n(\Omega)$，而且

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\overset{\vee}{\Omega}_k} f(\mathbf{x})dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$$

也就可以作为 $f(\mathbf{x})$ 在这种区域 Ω 上的多重积分的定义，即

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n:=\lim_{k\to\infty}\int_{\overset{\vee}{\Omega}_k} f(\mathbf{x})dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$$

4.1.2 多重积分与坐标变换

在多元、多关系的数理分析中，自变元的选取乃是要「因地制宜」和「因时制宜」者也，往往在不同的区域或不同的阶段，宜于采用不同的变元作为数理分析的自变元，这也就是数理分析中经常要用到的

局部坐标系的妥为选取和坐标变换。在讨论多重积分的坐标变换公式之前，且让我们再来回顾一下单元积分的情形。

设 $x = \varphi(t)$ 是 t 的一阶连续可微函数，而且 $a = \varphi(c), b = \varphi(d)$。则有公式：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

在形式上，这乃是一种直接代换，亦即把 x 代以 $\varphi(t)$，把 dx 代以 $\varphi'(t)dt$；而求积分的区间则是在对于 t 的积分区间 $[c, d]$，相应于对于 x 的积分区间 $[\varphi(c), \varphi(d)]$。归根究底，在实质内含上，公式右侧乃是下述和式（在无限细分）的极限，即

$$\sum_{i=1}^{N} f(\varphi(t_i))\varphi'(t_i)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = (t_i - t_{i-1})$$

而公式左侧则是下述和式的极限，即

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

其中 $x_i = \varphi(t_i), \Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$。由所设 $\varphi(t)$ 的一阶连续可微性，$\varphi'(t_i)\Delta t_i$ 乃是 Δx_i 的一阶逼近，亦即存在 ε 使得

$$|\Delta x_i - \varphi'(t_i)\Delta t_i| < \varepsilon \Delta t_i$$

而且当 $\Delta t_i \to 0$ 时 $\varepsilon \to 0$。由此可见，上述两个和式之差别满足下述估计，即

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(\varphi(t_i))(\Delta x_i - \varphi'(t_i)\Delta t_i) \right| < M\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = M\varepsilon(d - c)$$

其中 M 是 $|f(\varphi(t))|$ 在 $[c, d]$ 上的极大值。所以在无限细分下其差别趋于 0，这也就是上述积分公式的证明。

接著让我们先来研讨二维的情形。设

$$u_1 = g_1(x_1, x_2), \quad u_2 = g_2(x_1, x_2)$$

这样一对一阶连续可微函数定义了一个将 (x_1,x_2)–平面中的区域 Ω 映射到 (u_1,u_2)–平面中的区域 Ω' 之上，而 $f(u_1,u_2)$ 则是定义于 Ω' 上的连续函数。先从形式上直接代入，即有

$$du_1=\frac{\partial g_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_1}{\partial x_2}dx_2,\quad du_2=\frac{\partial g_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_2}{\partial x_2}dx_2$$

$$du_1\wedge du_2=\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2}-\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)dx_1\wedge dx_2=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}dx_1\wedge dx_2$$

所以应该有公式：

$$(*)_2\qquad \int_{\Omega'}f(u_1,u_2)du_1\wedge du_2=\int_{\Omega}f(g_1(\mathbf{x}),g_2(\mathbf{x}))\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}dx_1\wedge dx_2$$

接著再从 $(*)_2$–式侧的实质内含来探讨其证明。

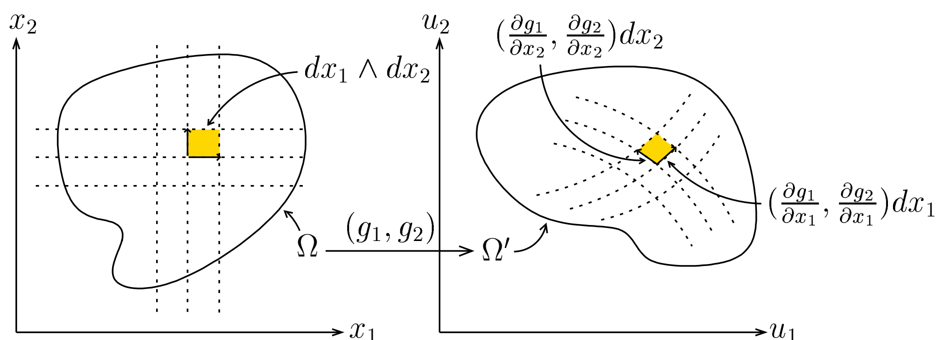
我们先用 (x_1,x_2)–平面上的纵横坐标线把 Ω 分割成很多小格，$dx_1\wedge dx_2$ 所表达者乃是其中一个典型小格的有向面积。在 (g_1,g_2) 所定义的映射之下（如 [图 4–2] 所示），上述典型小格的映象是一个微小的典型四边形。它的有向面积可以用下述微小切向量：

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1},\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)dx_1\quad 和\quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2},\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)dx_2$$

所张的微小平行四边形的有向面积表达其二阶逼近，亦即其有向面积和

$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}dx_1\wedge dx_2$$

的差别乃是比 $dx_1\wedge dx_2$ 更高阶的微量。



[图 4–2]

不难看到，当我们用细分求和的极限去表达 $(*)_2$–式之左侧时，采用 $\{u_1, u_2\}$ 的坐标线把 Ω' 细分乃是一种直观简单的分割法，但是此事并非必要！例如我们也可以如 [图 4–2] 所示，改用 (x_1, x_2) 的坐标线在 (g_1, g_2)–映射下所得的两系参数曲线把 Ω' 加以细分，则所得之和式中的典型项乃是

$$\begin{aligned} & f(u_1, u_2) \cdot \text{曲线小格的有向面积} \\ = \; & f(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)} dx_1 \wedge dx_2 + \varepsilon dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

其中在无限细分下 $\varepsilon \to 0$。

由此可见，改用上述两系参数曲线把 Ω' 加以细分所得之和式和 $(*)_2$–式右侧二重积分采用相应的 (x_1, x_2) 坐标线的细分所得的和式，其差别至多是

$$M\varepsilon(\sum dx_1 \wedge dx_2) = M\varepsilon \cdot \Omega \text{ 的面积}$$

其中 M 乃是 $f(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$ 在 Ω 上的极大值。易见它是在无限细分下趋于 0 的，这也就证明了 $(*)_2$–式。

上述对于二元的讨论，可以直接推广到 n 元，其结果乃是下述 [定理 4.1]：

【定理 4.1】：设 $u_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, 乃是将 (x_i)–空间中的区域 Ω 映射到 (u_i)–空间中的 n–维区域 Ω' 之上的一阶连续可微映射，$f(u_1, \ldots, u_n)$ 是定义在 Ω' 上的连续函数，则有

$$(*)_n \qquad \begin{aligned} & \int_{\Omega'} f(u_1, \ldots, u_n) du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \\ = & \int_{\Omega} f(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_n(\mathbf{x})) \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

<u>证明</u>：上述公式的验证乃是 $(*)_2$–式的论证的直接推广，读者可先行讨论 $n = 3$ 的情形，然後再验证一般的情形，乃是一种促进自己对多重积分的理解的好练习。

【例子】：在 §4.1.1 分节中，由指数定则和 n–维坐标矩形上的多重积分可以归于逐次偏积分相结合，说明

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \ldots + x_n^2)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}^n$$

但是具有基本重要性的单元积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ 之值的确定，其实本身依然是一个具有挑战性的问题。其实，解决上述求值问题的一个巧妙的途径乃是利用公式：

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right\}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1 \wedge dx_2$$

然後利用右侧重积分所含有的旋转对称性计算得其值乃是 π！

有鉴于极坐标乃是充分体现 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转对称性的坐标系，所以上式右侧的重积分应当改用极坐标加以表达，这样才能充分体现它乃是旋转对称的好处。由坐标变换公式

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta$$

即得

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1 \wedge dx_2 &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du, \quad u = r^2 \\ &= \pi \end{aligned}$$

由此即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

既然业已求得上述积分之值，我们又可以再用

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

和上述多重积分的球对称性反过来求得 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球而的 $(n-1)$–维体积之公式。令其为 ω_n，不难由多重积分的几何内含看到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} \omega_n dr = \omega_n \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

其中 $r^{n-1}\omega_n dr$ 乃是分别以 r 和 $r+dr$ 为半径的同心球面之间的 n–维体积。再者

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u} u^{(\frac{n}{2}-1)} du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$$

而 Euler's Γ–函数具有性质：

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad \text{（参看第四册第三章之习题 9）}$$

由此可得当 n 是偶数时

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2}-1)! \quad \text{（！表示阶乘）}$$

而当 n 是奇数时

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}), \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

【习题】：在 $n=3$ 的情形，试用球面坐标和笛氏坐标的坐标变换公式验证：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= 4\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r^2 dr \quad (\text{Archimedes' } \omega_3 = 4\pi)\end{aligned}$$

[注]：在 $n \geq 4$ 的一般情形，我们也可以有 n–维欧氏空间的球坐标，它除了矢径之长 r 之外还有 $(n-1)$ 个角度的坐标。当 r 取定为 1 时，它们就是 $(n-1)$–维单位球面上的一组坐标。在下一节我们就会讨论如何用它们的积分公式表达 ω_n。

4.2 线积分、面积分及其高维推广

在一般多元、多关系的数理分析中，所涉及的体系往往含有多个参变量（以变元表之），而它们又满足多个函数关系，这也就是在第二章所研讨的模式

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), f(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq m\}$$

其中 $f_i(\mathbf{x})$ 都是在某一定义域上至少一阶连续可微的。$\mathcal{S}$ 中的一点 $\mathbf{x}_0$，若有 $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ 使得

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})}\right|_{\mathbf{x}_0} \neq 0$$

则称 $\mathbf{x}_0$ 为 $\mathcal{S}$ 中的一个<u>规则点</u> (regular point)。由隐函数定理，得知在这种规则点 $\mathbf{x}_0$ 的邻近 $\mathcal{S}$ 在概念上可以改用 m 个 $(n-m)$ 个自变元的隐函数描述之，亦即

$$x_{j_1} = g_1(\widetilde{\mathbf{x}}), \ldots, x_{j_m} = g_m(\widetilde{\mathbf{x}})$$

其中 $\widetilde{\mathbf{x}}$ 表示 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$ 之外的那 $(n-m)$ 个变元，其变动范围乃是 $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ 的一个适当邻域。用几何的语言来说，$\mathcal{S}$ 在规则点 $\mathbf{x}_0$ 的邻近乃是 $\mathbb{R}^n$ 之中的一片 $(n-m)$–维曲面。由此可见，一个足以研讨多元、多关系的数理分析的积分概念，当然还得包括那种以 $\mathbb{R}^n$ 中的一片 k–维曲面为其求积之区域的曲面积分。其中最为简单的情形当然就是 $k=1$ 的线积分。

4.2.1 线积分 (Line Integral)

$\mathbb{R}^n$ 中的一段曲线 γ 若能用一种一阶连续可微的参数式加以表达，亦即

$$\gamma = \{\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ a \leq t \leq b\}$$

则称 γ 为一阶可微曲线。我们可以把 φ 看做由区间 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的一个一阶可微映射，而 γ 则是其映象 (image)。显然，同一条曲线 γ 可以有很多不同的参数式加以表达，往後我们将明确其参数式者叫做参数曲线，所以<u>参数曲线</u>其实就是上述映射本身。在概念上，一个映射 φ 和其象点所组成的子集 $\gamma = \{\varphi(t),\ a \leq t \leq b\}$ 是有本质上的区别的，请读者注意，切勿混淆。例如单位圆乃是一条曲线，$x_1 = \cos kt,\ x_2 = \sin kt$ 所描述者则是参数曲线。当 k 不同时，其所描述者乃是不同的参数曲线。

设 $f_i(\mathbf{x}), 1 \leq i \leq n,$ 是定义于 $\mathbb{R}^n$ 中某一区域 D 上的连续函数，则表式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

叫做 D 上的一个一次微分形式 (differential 1-form)。

设 $\varphi:[a,b]\to D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ 是 D 中的一条一阶可微参数曲线，我们将以 $\varphi^*(\omega)$ 表示把 ω 中的 x_i 代以 $\varphi_i(t)$ 之所得，亦即

$$\varphi^*(\omega)=\sum_{i=1}^{n}f_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)dt$$

再者，设 $\psi:[c,d]\to D$, $\psi(s)=(\psi_1(s),\ldots,\psi_n(s))$ 是同一条曲线 γ 的另一种参数描述，亦即

$$\{\varphi(t),\ a\le t\le b\}=\gamma=\{\psi(s),\ c\le s\le d\}$$

是 D 中同一个子集，则有

$$\psi^*(\omega)=\sum_{i=1}^{n}f_i(\psi(s))\psi_i'(s)ds$$

试问是否恒有

$$\int_a^b\varphi^*(\omega)\overset{?}{=}\int_c^d\psi^*(\omega)$$

其实，φ 和 ψ 所描述者乃是在同一条轨道 γ 上的两种运动。我们可以把 t 和 s 看做标记 γ 上各点的两种坐标（所以不妨假设下述 $\lambda'(s)$ 和 $\mu'(t)$ 两者到处不为零），同一点的 t–坐标和 s–坐标之间的坐标变换可表达为

$$t=\lambda(s),\ s=\mu(t),\quad \lambda'(s)=\frac{dt}{ds},\ \mu'(t)=\frac{ds}{dt}$$

由此可见

$$\varphi_i'(t)=\frac{dx_i}{dt}=\frac{dx_i}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\psi_i'(s)\mu'(t)$$
$$\psi_i'(s)=\frac{dx_i}{ds}=\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\varphi_i'(t)\lambda'(s)$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi^*(\omega) &= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)dt \\ &= \int_c^d \sum_{i=1}^n f_i(\psi(s))\varphi_i'(t)\lambda'(s)ds \\ &= \int_c^d \sum_{i=1}^n f_i(\psi(s))\psi_i'(s)ds = \int_a^b \psi^*(\omega)\end{aligned}$$

上述恒为相等的单元积分就定义为一次微分形式 ω 在曲线 γ 上的线积分，以符号 $\int_\gamma \omega$ 记之。亦即

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \varphi^*(\omega) \quad \left(= \int_c^d \psi^*(\omega)\right)$$

[注]：上述线积分的处理方式是通过曲线的参数表示把它归于单元积分，其关键是得要验证它其实是和参数表式的选取无关的。其好处是把定义和计算法一并解决，而且这种处理法可以直接推广到 k–维曲面积分。

4.2.2 曲面积分

在 $\mathbb{R}^n$ 中的一片 k–维曲面 Σ 具有其局部坐标系 $(t_1, \ldots, t_k)$，亦即其上各点的坐标都可以表达为 $(t_1, \ldots, t_k)$ 的函数

$$x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k), \quad 1 \leq i \leq n$$

而且对于 Σ 中每点 $\mathbf{x}$ 都存在适当的 $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ 使得

$$\left.\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}\right|_{\mathbf{x}} \neq 0$$

用几何的语言来说，$x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k), 1 \leq i \leq n,$ 所给者乃是 k–维 $\mathbf{t}$–空间中的一个区域 Ω 到 n–维 $\mathbf{x}$–空间中的一片 k–维曲面 Σ 上的一对一可微映射

$$\Phi : \Omega \to \Sigma \subset \mathbb{R}^n$$

当我们只让 t_j 变动而把其他 $(k-1)$ 个自变元取定，则其象点所描述者乃是 $\mathbb{R}^n$ 中的一条参数曲线，其速度向量为

$$\mathbf{v}_j = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_j}, \ldots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_j}\right)$$

由此可见，上述 Φ 的规则性条件 (regularity conditions) 的几何意义乃是 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 是到处线性无关的。

再者，设 $(s_1, \ldots, s_k)$ 是 Σ 上另一个局部坐标系，亦即

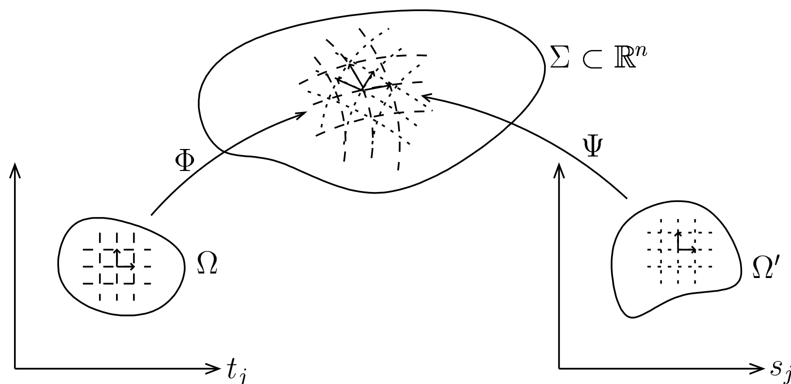
$$\Psi : \Omega' \to \Sigma \subset \mathbb{R}^n, \quad x_i = \psi_i(s_1, \ldots, s_k)$$

是将 k–维 $\mathbf{s}$–空间中的一个区域 Ω' 映射到 Σ 上的一对一可微映射，而且也满足规则性条件。

不难验证

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k$$
$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \frac{\partial(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k})}{\partial(s_1, \ldots, s_k)} ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_k$$
$$dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k = \frac{\partial(t_1, \ldots, t_k)}{\partial(s_1, \ldots, s_k)} ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_k$$

其中 $\frac{\partial(t_1,\ldots,t_k)}{\partial(s_1,\ldots,s_k)}$ 乃是 Σ 上两个局部坐标系之间坐标变换式，$t_j = g_j(s)$, $1 \le j \le k$, 的 Jacobian.



[图 4–3]

设 $\{f_{i_1,\ldots,i_k}(\mathbf{x}),\ 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\}$ 是 $\binom{n}{k}$ 个定义于 $\mathbb{R}^n$ 中某一区域 D 上的连续函数，则表式

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

叫做 D 上的一个 k 次外微分形式 (exterior differential k-form)。

设 $\Phi : \Omega \to \Sigma \subset D$，亦即 Σ 是包含在 D 中的一片 k–维曲面。我们将以 $\Phi^*(\omega)$ 表示把 ω 中的 x_i 代以 $\varphi_i(\mathbf{t})$ 之所得，亦即

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k}(\Phi(\mathbf{t})) \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k$$

同样的计算有

$$\Psi^*(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k}(\Psi(\mathbf{s})) \frac{\partial(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k})}{\partial(s_1, \ldots, s_k)} ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_k$$

由此即可验证

$$\int_\Omega \Phi^*(\omega) = \int_{\Omega'} \Psi^*(\omega)$$

恒成立，其共同积分值就是我们所要定义的 ω 在 Σ 上的积分，亦即

$$\int_\Sigma \omega := \int_\Omega \Phi^*(\omega) \quad \left(= \int_{\Omega'} \Psi^*(\omega) \right)$$

4.2.3 例子

(1) 线积分与向量场：

在线积分中之所积者 (integrand) 乃是一个一次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) dx_i$, $\mathbf{x} \in D$。我们可以把 $\{f_i(\mathbf{x}),\ 1 \le i \le n\}$ 看做一个向量 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 的分量，即令

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$$

则它乃是在 D 中每一点 $\mathbf{x}$ 指定一个于该点（切空间中）的一个向量，称之为向量场 (vector field)。再者

$$d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$$

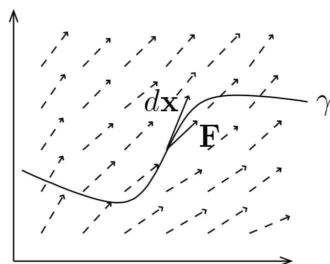
乃是一个将 $\mathbf{x}$ 点移到 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ 点的微小位移向量，而 ω 实乃 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 和 $d\mathbf{x}$ 的内积，即

$$\omega = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

例如在物理学中重要的重力场，电场和磁场的数理表达都是向量场的实例，而其所相应的一次微分形式所表达者就是在这种力场的作用下，微小位移所作的「功」(work)，亦即

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (= \omega)$$

由此可见线积分 $\int_\gamma \omega$ 的实质内涵也就是上述内积在无限细分之下的总和。当 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是表达某种力的向量场时，则 $\int_\gamma \omega$ 的物理意义就是沿 γ 的运动所作的功。



[图 4–4]

(2) 设 $U(\mathbf{x})$ 是开区域 D 上的一阶连续可微函数，则向量场

$$\nabla U(\mathbf{x}) := (\frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$$

叫做 U 的<u>梯度向量场</u> (the gradient vector field of U)。再者，$\nabla U(\mathbf{x})$ 所相应的一次微分形式

$$\omega = \nabla U(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot dx_i$$

其实就是 U 的全微分 (total differential, 亦即 dU)。

设 γ 是 D 中的一条参数曲线，即以

$$\gamma(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad a \le t \le b$$

为其参数式者。令 $U(t)$ 为将 x_i 以 $\varphi_i(t)$ 代入之所得，即

$$U(t) := U(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

则有

$$U'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)} \varphi_i'(t)$$

所以由线积分的定义和微积分基本定理，可得

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \varphi^*(\omega) = \int_a^b U'(t)dt = U(b) - U(a) \\ &= U(\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b)) - U(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a))\end{aligned}$$

由此可见，当 ω 所相应的向量场乃是一个函数 $U(\mathbf{x})$ 的梯度向量场时（亦即 $\omega = dU$），线积分 $\int_\gamma \omega$ 的值其实仅仅和曲线 γ 的端点有关，它的值就是 $U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$。

反之，设 $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})dx_i$ 是一个定义在开的一个连通区域 D 上的一次微分形式，而且 $\int_\gamma \omega$ 对于 D 中任给可微曲线 γ 都仅仅和 γ 的端点有关。我们不妨取定 D 中任给一点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 作为基点，令

$$U(\mathbf{x}) = \int_\gamma \omega$$

其中 γ 是任何一条由基点 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{x}$ 点的可微曲线（由所设，上述线积分之值仅仅和 $\mathbf{x}$ 点有关）。不难验证，如此定义的 $U(\mathbf{x})$ 即有

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}), \quad \text{亦即} \quad \omega = \nabla U(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = dU$$

由此可见，线积分 $\int_\gamma \omega$ 仅仅和其端点有关的充要条件乃是 ω 等于某个一阶连续可微的函数 U 的全微分，亦即

$$\omega = \nabla U(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

(3) 对于一个给定的一次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})dx_i$ 其线积分 $\int_\gamma \omega$ 是否仅仅和其端点有关？上述所讨论的充要条件乃是一个十分难于检验的条

件（除非能够一眼看到某个函数 U，它满足 $\left.\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}), 1 \leq i \leq n$）。是否还有另一种易于检验的条件呢？在 $f_i(\mathbf{x})$ 也都是一阶连续可微的情形，假如存在着 $U(\mathbf{x})$ 使得

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i \leq n$$

则有

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}}$$

所以

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

乃是一种易于检验的必要条件。但是它是否业已充分呢？假若果真业已充分，此事岂不妙哉！不然则应该去探求某种补充条件，使得上述必要条件再加上它就能够保证 ω 乃是一个全微分。首先，让我们先来看一个简单但是颇具重要性的例子，它说明了上述必要条件在一般情形并非充分。令

$$\omega_0 = \frac{-x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

亦即

$$f_1 = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad f_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

由此易见

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

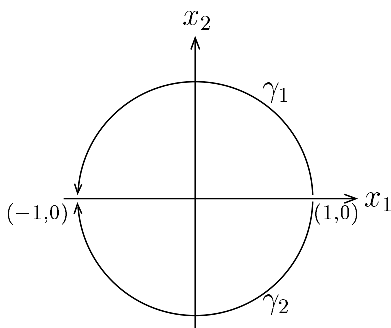
但如 [图 4–5] 所示：

$$\gamma_1: \ x_1 = \cos t, \ x_2 = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma_2: \ x_1 = \cos t, \ x_2 = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{-x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2} = \int_0^\pi dt = \pi$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{-x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2} = \int_0^\pi -dt = -\pi$$



[图 4–5]

由此可见，上述 ω_0 的线积分并非仅仅和积分曲线 γ 的端点有关。在这里，$\int_\gamma \omega_0$ 之值究竟和积分曲线的什麽才是真正相关的呢？这就是一个值得实事求是去探索的问题。

有鉴于上述 ω_0 的 f_1 和 f_2 都含有旋转不变的分母 $(x_1^2+x_2^2)$，把它改用极坐标 (r,θ) 来表达，肯定会得到某种简化。即令

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta$$

代入 ω_0，即得

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{r^2}\{-r\sin\theta(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + r\cos\theta(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)\}\\ &= \frac{1}{r^2}\Big\{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta\Big\} = d\theta\end{aligned}$$

由此易见 $\int_\gamma \omega$ 其实只和积分曲线在 θ 的改变量有关。设 $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$, $a \le t \le b$, 是其极坐标的参数式，则

$$\int_\gamma \omega_0 = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = \int_a^b \theta'(t)dt = \theta(b) - \theta(a)$$

再者，设 γ_1 和 γ_2 是两条具有同样的始、终点的曲线，则 γ_1 和 γ_2 的反向曲线就连接成一条闭曲线 γ_0，显然有

$$\int_{\gamma_1} \omega_0 - \int_{\gamma_2} \omega_0 = \int_{\gamma_0} \omega_0 = 2\pi n(\gamma_0)$$

其中 $n(\gamma_0)$ 是闭曲线绕著原点的有向绕数 (winding number)。

其实，我们还可以把上述有意思的现象作下述推广：

设 $U(x_1, x_2)$ 是一个在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上二阶连续可微函数。令

$$\omega = c\omega_0 + dU = (\frac{-cx_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial U}{\partial x_1})dx_1 + (\frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\partial U}{\partial x_2})dx_2$$

则显然有：

(i) ω 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上到处满足 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ 这个必要条件；

(ii) 对于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中任给闭曲线 γ_0

$$\int_{\gamma_0} \omega = 2\pi n(\gamma_0)c$$

在此，我们还可以进一步提出下述很值得我们作更加深入的探索的问题：是否在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上满足 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ 这个必要条件的一阶连续可微一次微分形式 ω 也都具有

$$\int_{\gamma_0} \omega = 2\pi n(\gamma_0)c \quad \text{（其中 } c \text{ 是一个随 } \omega \text{ 而定的常数）}$$

再者，是否满足上述条件的一阶连续可微一次微分形式 ω 其实都可以表达成 $\omega = c\omega_0 + dU$ 这种形式？

(4) 三维欧氏空间的面积分与向量场：

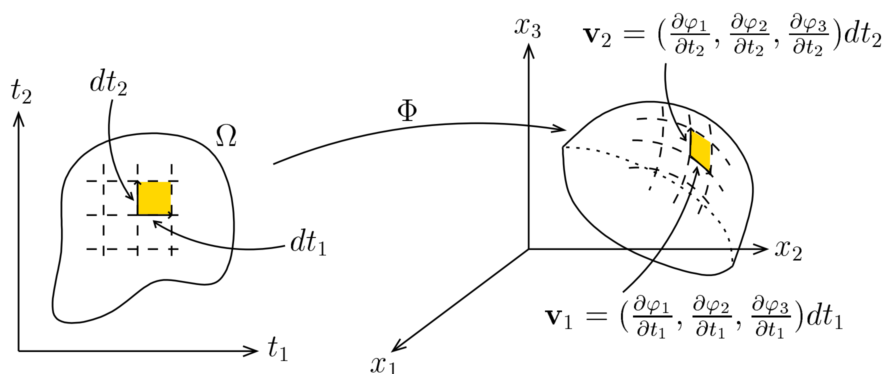
在 $\mathbb{R}^3$ 中某一个连通开子集 D 上定义的一个二次外微分形式，都可以写成

$$\omega = f_1(\mathbf{x})dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\mathbf{x})dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_2$$

由此可见它也有一个相应的 D 上的向量场，即

$$\omega \longleftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$$

如 [图 4–6] 所示，Σ 是 D 中的一片曲面，$\Phi : \Omega \to \Sigma$ 是 Σ 的一个取定参数表达式。



[图 4–6]

以 dt_1 和 dt_2 表示在 $\mathbf{t}$ 点分别和 t_1–轴和 t_2–轴平行的微小位移。在映射 Φ 之下，其相应的切向量分别就是

$$\mathbf{v}_1 = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1})dt_1 \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2})dt_2$$

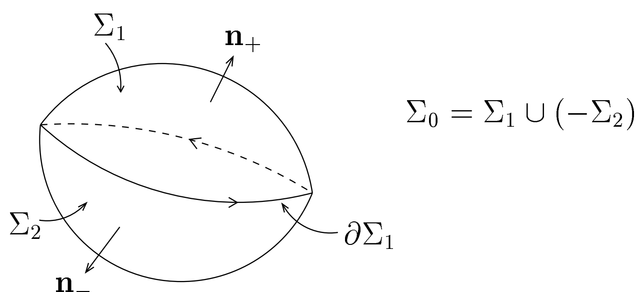
由此可见 $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ 所表达者乃是曲面 Σ 上相应于 Ω 中的坐标小格（亦即 $/\!/(dt_1, dt_2)$）的那个微片的面积和方向的二阶逼近。

设想向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 乃是空间中一个给定的流动 (flow) 的速度向量场，则它在单位时间内通过 Σ 的上述微片的液体的二阶逼近就等于

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \\ =& \left\{ f_1(\Phi(\mathbf{t}))\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(t_1, t_2)} + f_2(\Phi(\mathbf{t}))\frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(t_1, t_2)} + f_3(\Phi(\mathbf{t}))\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right\} dt_1 \wedge dt_2 \end{aligned}$$

由此可见，曲面积分 $\int_\Sigma \omega$ 所表达者，乃是以其相应的 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为其流速向量场在单位时间内通过曲面 Σ 的总流量是也。

(5) 设 Σ_1 是一个具有逐段平滑的边界的定向曲面，则它在每一点的两个法向 (normal directions) 也就有了其正、负之别。再者，它的边界也就有其相应的定向（如 [图 4–7] 所示）。



[图 4–7]

再者，如 [图 4–7] 所示，设 Σ_2 是另一个定向曲面，其定向边界和 $\partial\Sigma_1$ 相同，则 Σ_1 和 Σ_2 的反向者就组合成一个空间中的定向闭曲面 (oriented closed surface) Σ_0，其正法向不是都向外就是都向里。再者，易见

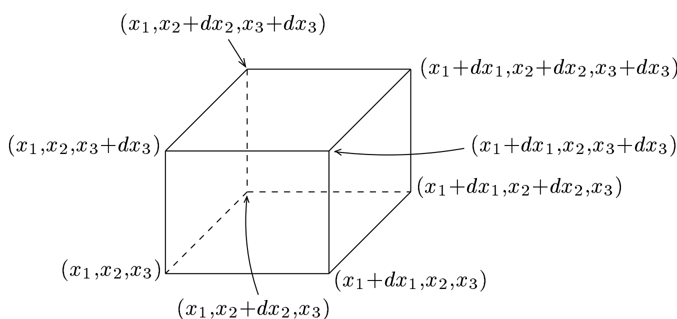
$$\int_{\Sigma_0} \omega = \int_{\Sigma_1} \omega - \int_{\Sigma_2} \omega$$

由此可见，以 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为其流速向量场的流动，其单位时间流过 Σ_1 者等于其流过 Σ_2 者的条件也就是流入 Σ_0 者等于流出 Σ_0 者。换句话说，亦即上述流体包含在那个以 Σ_0 为其边界的三维区域之内的液体之总量是守恒的。

有鉴于某一个区域之内的液体之总量乃是其所含的局部各小分块之内的液体之总和，假若流体对于其所含的每一小分块都是守恒的，则它当然对于以 Σ_0 为其边界的这一整块也必然是守恒的。再者，若这种局部化的守恒性普遍成立，则显然也就有全局化的守恒性对于那种其所有内点皆具有局部守恒性的三维区域皆成立。

(6) 局部守恒性的微分条件：

由上可见，局部守恒性乃是一种自然而且有用的条件，而微分法则是求得其解析条件式的有效方法，其具体做法乃是分析如 [图 4–8] 所示的坐标小块的守恒性在 dx_1, dx_2 和 dx_3 都无限缩小的极限式。其实，我们只要计算流体在单位时间流进和流出这个坐标小分块的流量之差的三阶逼近（亦即略去高于三阶之微量）。



[图 4–8]

上述坐标小方块共有上、下;右、左;前、後六个面。其方向和有向面积可以分别用 $dx_1 \wedge dx_2$, $-dx_1 \wedge dx_2$; $dx_2 \wedge dx_3$, $-dx_2 \wedge dx_3$; $dx_3 \wedge dx_1$, $-dx_3 \wedge dx_1$ 表达之。由此可见,其上、下两面出、入之差乃是

$$\begin{aligned} &f_3(x_1,x_2,x_3+dx_3)dx_1 \wedge dx_2 - f_3(x_1,x_2,x_3)dx_1 \wedge dx_2 \\ \equiv\ &\left.\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (\text{mod 高于三阶者}) \end{aligned}$$

其右、左两面出、入之差乃是

$$\begin{aligned} &f_1(x_1+dx_1,x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3 - f_1(x_1,x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3 \\ \equiv\ &\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (\text{mod 高于三阶者}) \end{aligned}$$

其前、後两面出、入之差乃是

$$\begin{aligned} &f_2(x_1,x_2+dx_2,x_3)dx_3 \wedge dx_1 - f_2(x_1,x_2,x_3)dx_3 \wedge dx_1 \\ \equiv\ &\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (\text{mod 高于三阶者}) \end{aligned}$$

所以将出入上述坐标小分块的流量除以其体积元素 $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ 後再求其在 dx_1, dx_2, dx_3 都趋于零的极限值,其所得即为

$$\left.\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)\right|_{\mathbf{x}}$$

称之为所给流动在 $\mathbf{x}$ 点的<u>发散量</u> (divergence),而发散量在该点等于 0 则是流动在该点的局部化守恒性的微分条件式,亦即

$$(*) \qquad \left.\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)\right|_{\mathbf{x}} = 0$$

若所给的流动（或其所相应的一阶可微二次外微分形式 ω）在某一开域 D 上到处满足上述条件 $(*)$，则称之为在 D 上无发散 (divergence free) 的流动（或二次外微分形式）。

(7) n–维欧氏空间的超曲面积分与向量场

在 (4) 中对于 $n=3$ 的情形的研讨，可以直截了当地推广到一般的情形。首先，定义于 $\mathbb{R}^n$ 中某个开子集 D 上的一个 $(n-1)$–次外微分形式，都可以写成

$$\begin{aligned}\omega = {} & f_1(\mathbf{x})dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n - f_2(\mathbf{x})dx_1\wedge dx_3\wedge\ldots\wedge dx_n \\ & +\ldots+(-1)^{n+1}f_n(\mathbf{x})dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{n-1}, \quad \mathbf{x}\in D\end{aligned}$$

所以它也同样地有其相应的 D 上的向量场，即为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$$

设 Σ 是 D 中的一片超（亦即 $(n-1)$–维）曲面，$\Phi:\Omega\to\Sigma$ 是 Σ 的一个取定参数表达式，即

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{t}), \quad 1\le i\le n,\ \mathbf{t}\in\Omega$$

而且满足规则性条件

$$\mathbf{v}_j = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_j}, \ldots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_j}\right)dt_j, \quad 1\le j\le n-1$$

总是线性无关的。令 $//(dt_1,\ldots,dt_{n-1})$ 是 Ω 中的坐标小分格，则其在 Φ 之下的映象 $\Phi(//(dt_1,\ldots,dt_{n-1}))$ 的 $(n-1)$–阶（线性）逼近就是 $\mathbf{v}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_{n-1}$。所以其相应的 n–维流动 (n-dimensional flow) 在单位时间内通过超曲面 Σ 的上述微片的流量的 $(n-1)$–阶逼近就等于

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x})\wedge\mathbf{v}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_n = {} & \left\{f_1(\Phi(\mathbf{t}))\frac{\partial(\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_{n-1})}\right. \\ & \left.+ f_2(\Phi(\mathbf{t}))\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_3,\ldots,\varphi_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_{n-1})}+\ldots+f_n(\Phi(\mathbf{t}))\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{\partial(t_1,\ldots,t_{n-1})}\right\}dt_1\wedge\ldots\wedge dt_{n-1}\end{aligned}$$

由此可见，$(n-1)$–维曲面积分 $\int_\Sigma\omega$ 所表达者乃是以其相应的 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为其流速向量场的 n–维流动在单位时间内通过超曲面 Σ 的总流量是也。

(8) 同样地我们也可以验证 n–维流动的局部守恒性的微分条件乃是其发散量等于 0，即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)\bigg|_{\mathbf{x}}=0$$

其验证是 $n=3$ 的情形的直截了当的推广，留作习题。

4.2.4 习题

(1) 由笛氏坐标 (x_1,x_2) 和极坐标 (r,θ) 之间的变换公式，亦即

$$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta\qquad(x_1^2+x_2^2=r^2)$$

微分即得

$$\begin{cases}dx_1=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta\\ dx_2=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta\end{cases}$$

把它想成是 dr 和 $d\theta$ 的线性方程组，试求解 $d\theta$。

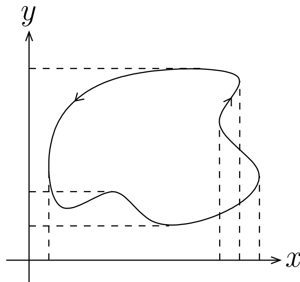
(2) 试构造一个在 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(\pm1,0)\}$ 上一阶连续可微的一次微分形式，它对于 D 中的任给闭曲线的线积分之值为

$$\int_\gamma\omega=2\pi c_1n_1+2\pi c_2n_2$$

其中 c_1, c_2 是任给常数而 n_1 和 n_2 则分别是 γ 对于 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 的定向绕数。

(3) 试问是否可以把你的构造法推广到平面上任给有限个点的情形？

(4) 如 [图 4–9] 所示，$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是平面上的区域，其边界 $\partial\Omega$ 是一个一阶连续可微的简单闭曲线。



[图 4–9]

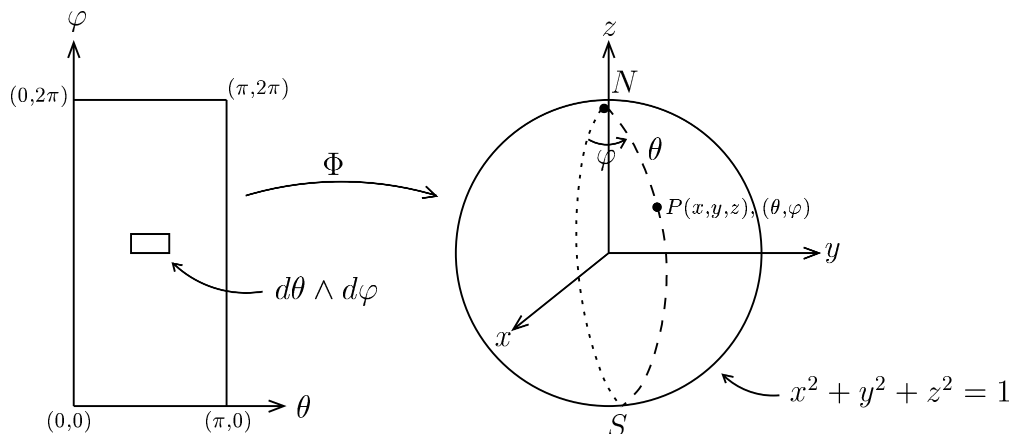
试以图解说明 $\int_{\partial\Omega} -ydx$ 和 $\int_{\partial\Omega} xdy$ 都是 Ω 的定向面积。（注意 $\partial\Omega$ 的定向和 Ω 的定向是密切相关的。如 [图 4–9] 所示者，是 Ω 取正向的情形。）由此可见，也有

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \text{Area}(\Omega)$$

(5) 设 Ω 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ 所描述的椭圆内部，则 $\partial\Omega$ 可以用 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 加以参数描述。 试用它来计算

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

(6) 球面上的极坐标与其面积元素 (area element)：球面具有极为丰富的对称性。例如它对于其任给「直径」是旋转对称的，一如地球的自转乃是对于南北极连线为轴的旋转对称性的具体表现。如 [图 4–10] 所示，我们取球的半径为单位长，则球面上任给南北极之外的点 P 可以用 (θ, φ) 作为其坐标，其中 θ 是 P 点到北极的球面距离而 φ 则是过 P 点的经线和选定的基准经线的夹角。



[图 4–10]

令 (x, y, z) 为 P 点在 $\mathbb{R}^3$ 中的笛氏坐标，则有

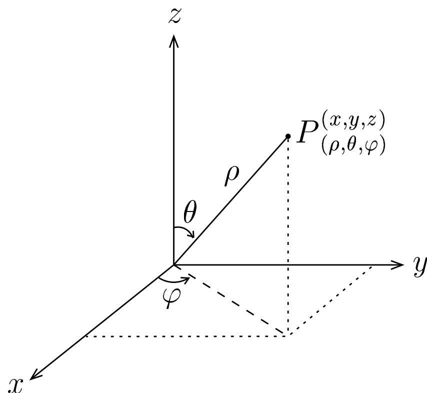
$$\Phi: \quad x = \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta$$

试求在 (θ, φ) 坐标面中的小格 $//(d\theta, d\varphi)$ 的 Φ 之映象的球面面积的二阶逼近（称之为球面坐标的面积元素）。

(7) 试用习题 (6) 中所得的结果求单位球面的面积，并将你的计算和当年 Archimedes' 的球面面积公式之论证作一比较分析（参看第四册 §2.3 的例 (3)）。

(8) $\mathbb{R}^3$ 的球坐标 (ρ, θ, φ) 和笛氏坐标 (x, y, z) 之间的变换公式是（如 [图 4–11] 所示）：

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta$$



[图 4–11]

试改用球坐标计算

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx \wedge dy \wedge dz$$

(9) 试求 $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ 改用球坐标 (ρ, θ, φ) 的各自表式。然後再把它们想成 $d\rho \wedge d\theta$, $d\rho \wedge d\varphi$, $d\theta \wedge d\varphi$ 的三元联立方程组。用代数方法求解 $\sin\theta d\theta \wedge d\varphi$（它乃是单位球面上的面积元素，参考习题 (6)），其所得乃是定义于 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 上的二次外微分形式，即有：

$$\omega_0 = f_1(x, y, z) dy \wedge dz + f_2(x, y, z) dz \wedge dx + f_3(x, y, z) dx \wedge dy$$

试说明 ω_0 所相应的向量场的几何意义。

(10) 上述二次微分形式 ω_0 乃是习题 (1) 中 $d\theta$ 的自然推广。试验证其相应的向量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 乃是无发散量 (divergence free) 者。

(11) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，其边界是由一片片可微曲面组合而成者。试证

$$\int_{\partial\Omega} \omega_0 = \begin{cases} 0 & \text{若} \quad (0,0,0) \notin \Omega \\ 4\pi & \text{若} \quad (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

(12) 试构造类似于习题 (3) 在三维中，二次微分形式的推广。

4.3 外微分和微积分基本定理的高维推广

在本章的第一节中，我们研讨了一个 n 个自变元的函数 $f(\mathbf{x})$ 在给定的有界闭区域 D 上的积分，即 $\int_D f(\mathbf{x})dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$。接著在第二节中，我们进而把积分推广到多元、多关系的范畴，如线积分、面积分和 k–维的面积分等等。在一般情况，其所要积者 (integrand) 乃是一个定义于 n–维开子集 D 上的 k–次外微分形式 ω，而其所积之范围 (domain of integration) Σ 则是 D 中的一种定向的 k–维几何事物 (k-dimensional geometric objects)，通常是一个 k–维的定向曲面或由好些片 k–维定向曲面接合 (match up) 而成者。总之，一个 k–次外微分形式 ω 在这种定向的 k–维几何事物 Σ 上的积分可以归于 ω 在其组成之各片 k–维定向曲面上的积分之总和而定义之。再者，D 中一个具有局部坐标化的 k–维定向曲面 Σ，其实乃是一个由 k–维 $\mathbf{t}$–空间的一个区域 Ω 到 D 中的映象，即有

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k \supset \Omega & \xrightarrow{\Phi} & \Sigma \subset D \subset \mathbb{R}^n & & \\ \cup & & \cup & & \\ \mathbf{t} & \longmapsto & \Phi(\mathbf{t}) = (\varphi_1(\mathbf{t}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{t})) & & \end{array}$$

而且满足规则性条件。在上一节我们证明了：

$$\int_\Omega \Phi^*(\omega) = \int_{\Omega'} \Psi^*(\omega)$$

而其共同值则定义为 $\int_\Sigma \omega$。所以在本质上，一般的 k–维积分 $\int_\Sigma \omega$ 乃是通过局部坐标映射 $\Phi : \Omega \to \Sigma$ 把它归于第一节中所讨论的 k 个自变元的函数的积分，亦即

$$\int_\Sigma \omega := \int_\Omega \Phi^*(\omega)$$

本节的中心课题是如何把微积分基本定理推广到多元、多关系的范畴。在单元微积分的基本定理乃是

$$\int_a^b df = f(b) - f(a)$$

df 乃是一个单元的一次微分形式，而上述积分则是它和一维的有向线段 $[a,b]$ 相结合之所得。在此不妨采用线性代数中讨论对偶空间 (dual space) 所用的符号，即用：$< df, [a,b] >$ 表达 $\int_a^b df$。采用这种符号意味着我们将试着把一次微分形式和一维有向线段看成互相对偶的事物，而 $\int_a^b df$ 则就是这两种互相对偶的事物相互结合所产生之值。让我们把这种对偶性的想法下推到 0–次和 0–维的情形：一个函数 $f(x)$ 可以看做一个 0–次微分形式，而一个带有正、负号的点集组合则可以想成是一种 0–维定向几何事物。例如有向线段 $[a,b]$ 的边界就应该是 $\{b\} - \{a\}$，即

$$\partial[a,b] = \{b\} - \{a\}$$

如此顺理成章，我们应该把一个函数 $f(x)$ 和带有正、负号的点集相互结合之所得定义为 $f(x)$ 在这些点上的函数值的代数和。例如

$$< f, \partial[a,b] > = f(b) - f(a)$$

采用这种隐含对偶性的符号来表达微积分基本定理，其形式即为

$$< df, [a,b] > = < f, \partial[a,b] >$$

用线性代数中对偶空间的观点来看，则是求全微分运算 “d” 和求边界运算 “∂” 乃是互相对偶的线性映射。

上述讨论其实只是采取一种新的观点来表达原来的微积分基本定理，其好处是促使我们想到在高维的微积分中也应该有一种求微分的运算 “d” 使得

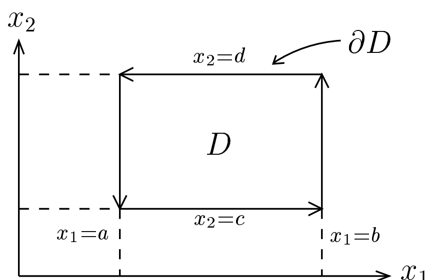
$$< \text{“}d\text{”}\omega, \Sigma > = \int_\Sigma \text{“}d\text{”}\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = < \omega, \partial\Sigma >$$

这也就是我们现在要去探索的外微分 (exterior differentiation) 和微积分基本定理的高维推广。

首先，让我们来分析一下 $n = k = 2$ 而且 D 是一个坐标矩形的情形。设 $\omega = f(x_1, x_2)dx_2$，而且 $f(x_1, x_2)$ 一阶连续可微。如 [图 4–12] 所示

，因为 ω 不含有 dx_1,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial D} f(x_1,x_2)dx_2 = \int_c^d f(b,x_2)dx_2 + \int_d^c f(a,x_2)dx_2 \\
&= \int_c^d [f(b,x_2) - f(a,x_2)]dx_2 = \int_c^d \left\{ \int_a^b \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \right\} dx_2 \\
&= \int_D \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}
$$



[图 4–12]

接著，再来看一下 $\omega = g(x_1,x_2)dx_1$ 的情形。因为 ω 不含有 dx_2,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial D} g(x_1,x_2)dx_1 = \int_a^b g(x_1,c)dx_1 + \int_b^a g(x_1,d)dx_1 \\
&= \int_a^b [g(x_1,c) - g(x_1,d)]dx_1 = \int_a^b dx_1 \left\{ \int_c^d - \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}} dx_2 \right\} \\
&= \int_D - \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}
$$

结合上述两种特殊情形的分析，即得下述公式，即

$$
\int_{\partial D} f_1(\mathbf{x})dx_1 + f_2(\mathbf{x})dx_2 = \int_D \left.\left\{ -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right\}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2
$$

其中 D 乃是一个坐标矩形。由此可见，我们应该把一个一阶连续可微的一次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^2 f_i(\mathbf{x})dx_i$ 的<u>外微分</u>定义为

$$
d\omega := \left.\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \wedge dx_2
$$

则公式

$$< d\omega, D > = < \omega, \partial D >$$

至少在 D 是坐标矩形的情形是成立的。再者，易见

$$\begin{aligned}
& df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 \\
= & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 \\
= & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 = d\omega
\end{aligned}$$

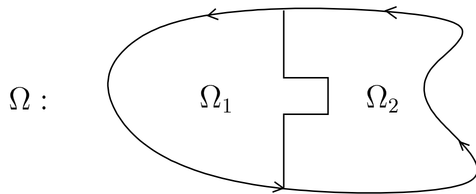
【Green's 定理】：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 是由逐段可微曲线所组成者；

$$\omega = f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2$$

是定义于一个包含 Ω 的开区域 D 上的一阶连续可微一次微分形式，则

$$(\star) \qquad \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \qquad d\omega = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

<u>证明</u>：首先，前述分析业已证明了 Ω 本身就是坐标矩形的特殊情形。再者，设 Ω 可以分解成 Ω_1 和 Ω_2 如 [图 4–13] 所示的接合：



[图 4–13]

则 $\partial\Omega_1$ 和 $\partial\Omega_2$ 在它们接合的共同边界上的定向相反，所以具有下述线积分的可加性

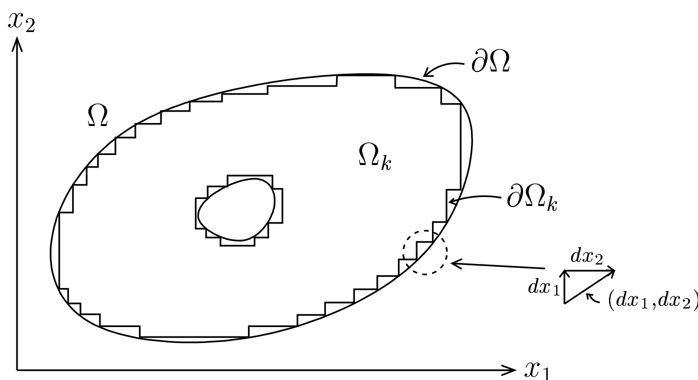
$$\int_{\partial\Omega_1} \omega + \int_{\partial\Omega_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

而面积分的可加性则是显然的。由此易证 $(\star)$–式在 Ω 乃是由有限个坐标矩形接合而成的情形也总是成立的。

如 [图 4–14] 所示，我们可以用逐步扩大的 Ω 的子区域 $\{\Omega_k\}$ 去穷尽 Ω（参看 §4.1），而它们本身都是由有限个坐标矩形接合而得者。因为 $\{\Omega \setminus \Omega_k\}$ 的面积在 $k \to \infty$ 时趋于 0，则显然有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} d\omega = \int_{\Omega} d\omega$$

所以我们只需要再去验证 $\lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Omega_k} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega$。兹证之如下：



[图 4–14]

由所设 $\partial\Omega$ 是分段可微的，所以它的微段可以用放大插图中的有向线段：(dx_1, dx_2) 为其一阶逼近，而其相应的 $\partial\Omega_k$ 的微段则为 $(dx_1, 0)$ 和 $(0, dx_2)$。设 $\varepsilon > 0$ 是任给正数（不论有多小），由 $f_1(\mathbf{x})$ 和 $f_2(\mathbf{x})$ 的连续性可见，只要把 k 取得足够大，$f_1(\mathbf{x})$（及 $f_2(\mathbf{x})$）在 $\partial\Omega$ 的微段和其相应的 $\partial\Omega_k$ 的微段之取值之差总是小于 ε。由此即得

$$\left| \int_{\partial\Omega} \omega - \int_{\partial\Omega_k} \omega \right| < \ell(\partial\Omega)\varepsilon$$

亦即证得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Omega_k} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

这样也就证明了

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Omega_k} \omega = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} d\omega = \int_{\Omega} d\omega \qquad \square$$

【Gauss 定理】：设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个 3–维的有界闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 是由逐片可微的曲面所组成者。设

$$\omega=f_1(\mathbf{x})dx_2\wedge dx_3+f_2(\mathbf{x})dx_3\wedge dx_1+f_3(\mathbf{x})dx_1\wedge dx_2$$

是定义于一个包含 Ω 的开区域 D 之上的一阶连续可微二次外微分形式，则

$$(\#)\qquad \int_{\partial\Omega}\omega=\int_\Omega d\omega,\qquad d\omega=\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

<u>证明</u>：直接验算，即有

$$\begin{aligned}&df_1\wedge dx_2\wedge dx_3+df_2\wedge dx_3\wedge dx_1+df_3\wedge dx_1\wedge dx_2\\=&\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_3\wedge dx_1+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}dx_3\wedge dx_1\wedge dx_2\\=&\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\end{aligned}$$

一如前述 Green's 定理的证明，让我们先来验证 Ω 是坐标矩形的特殊情形，即

$$\Omega_0=\{\mathbf{x};\ a_i\le x_i\le b_i,\ 1\le i\le 3\}$$

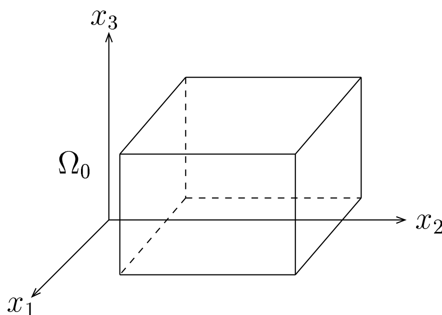
再者，令

$$\omega_1=f_1(\mathbf{x})dx_2\wedge dx_3,\quad \omega_2=f_2(\mathbf{x})dx_3\wedge dx_1,\quad \omega_3=f_3(\mathbf{x})dx_1\wedge dx_2$$

则上述验证显然可以归于

$$\int_{\Omega_0}\omega_i=\int_{\Omega_0}d\omega_i\,,\quad 1\le i\le 3$$

的各别验证。



[图 4–15]

如 [图 4–15] 所示，3–维坐标矩形 Ω_0 共有上、下；右、左；前、後这六个面。因为 ω_1 只含有 $dx_2 \wedge dx_3$ 项，所以 $\int_{\partial\Omega_0} \omega_1$ 除了在前、後滃悖玛n分之外，其他四面之积分皆显然为 0，即有

$$\int_{\Omega_0} \omega_1 = \int_{D_1} \Big[f_1(b_1, x_2, x_3) - f_1(a_1, x_2, x_3)\Big] dx_2 \wedge dx_3$$

其中 $D_1 = \{(x_2, x_3);\ a_2 \leq x_2 \leq b_2,\ a_3 \leq x_3 \leq b_3\}$。再以微积分基本定理将 $[f_1(b_1, x_2, x_3) - f_1(a_1, x_2, x_3)]$ 代以

$$\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1$$

即得

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_0} \omega_1 &= \int_{D_1} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right\} dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\Omega_0} d\omega_1 \end{aligned}$$

同理亦可验证

$$\int_{\partial\Omega_0} \omega_2 = \int_{\Omega_0} d\omega_2 \quad \text{和} \quad \int_{\partial\Omega_0} \omega_3 = \int_{\Omega_0} d\omega_3$$

三者两侧各别相加即得

$$\int_{\partial\Omega_0} \omega = \int_{\Omega_0} d\omega$$

同样地，当 Ω 可以分割成 Ω_1 和 Ω_2 相接而成者，则 $\partial\Omega_1$ 和 $\partial\Omega_2$ 的共同面上的定向相反。由此可见面积分对于这种接合的可加性，即

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega_1} \omega + \int_{\partial\Omega_2} \omega$$

而体积分的接合可加性则是显然的。由此可见 (#)–式在 Ω 乃是有限个 3–维坐标矩形接合而成的情形也总是成立的。

最後，我们也同样地可以用逐步扩大的 Ω 的子区域 $\{\Omega_k\}$ 去穷尽 Ω（参看 §4.1），而它们本身则都是由有限个 3–维坐标矩形接合而得者，即有

$$\int_{\partial\Omega_k} \omega = \int_{\Omega_k} d\omega$$

对于所有 Ω_k 皆成立，而且

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_k} d\omega = \int_{\Omega} d\omega$$

所以我们只需要再验证 $\lim_{k\to}\int_{\partial\Omega_k}\omega = \int_{\partial\Omega}\omega$。兹证之如下：

为此，我们不妨分别验证 $\lim_{k\to\infty}\int_{\partial\Omega_k}\omega_i = \int_{\partial\Omega}\omega_i, 1\le i\le 3$，而它们各别的验证几乎是完全一样的。所以在此仅详述 $i=1$ 的情形：

由所设 $\partial\Omega$ 是分片可微的。再者，对于任给 $\delta > 0$（不论其有多小），只要把 k 取得足够大，则 $\partial\Omega_k$ 业已包含在和 Ω 相距小于 δ 的那个薄层之内。对于 $\partial\Omega$（或 $\partial\Omega_k$）的每个微片，在求 ω_1 的面积分时，只有其在 $dx_2\wedge dx_3$ 方向的分量（亦即垂直投影）才有非零之值。再者，$\partial\Omega$ 上的微片可以分成两类，第一类是在它的 2δ 邻近具有相应的 $\partial\Omega_k$ 上的薄片，它和前者具有相等的 $dx_2\wedge dx_3$ 方向的分量；而其他部分则为第二类。只要把 k 取得足够大，属于第二类的那种微片的垂直投影的绝对值之和就可以小到任意小。另一方面，由 $f_1(\mathbf{x})$ 的均匀连续性易见 ω_1 在所有第一类微片上的积分和与其在 $\partial\Omega_k$ 上相应的积分和两者之差也是可以小到任意小的。这也就验证了

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\partial\Omega_k}\omega_1 = \int_{\partial\Omega}\omega_1$$

同理亦可验证

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\partial\Omega_k}\omega_i = \int_{\partial\Omega}\omega_i, \quad i=2,3$$

三者相加，即得所需证之

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\partial\Omega_k}\omega = \int_{\partial\Omega}\omega$$

亦即有

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \lim_{k\to\infty}\int_{\partial\Omega_k}\omega = \lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_k}d\omega = \int_{\Omega}d\omega \qquad \square$$

Gauss 定理的高维推广：

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界的 n–维闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 是由逐片可微超曲面所组成者。设

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i(\mathbf{x})dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_n$$

是定义于一个包含 Ω 的开区域 D 之上的一阶连续可微的 $(n-1)$–次微分形式，则

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \qquad d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

证明：和 3–维的情形基本相同。读者试自证之。 □

4.3.1 外微分和广义 Stoke's 定理

一个连续可微函数 $f(\mathbf{x})$ 也可以想成是外微分形式的特例，亦即 0–次者也。在这种最低次的情形其外微分也就是它的全微分，即

$$df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

设 γ 是 $f(\mathbf{x})$ 的定义域 D 中的一条可微曲线段，其始、终点分别是 $\mathbf{x}_0$、$\mathbf{x}_1$。把微积分基本定理用到单元函数 $f(\gamma(t))$，即得

$$\int_{\gamma} df = f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)$$

亦即

$$< df, \gamma > = < f, \partial\gamma >$$

再者，前面所研讨的 Green's 定理和广义 Gauss 定理证明了

$$< d\omega, \Omega > = < \omega, \partial\Omega >$$

在 Ω 是 n–维，ω 是 $(n-1)$–次的情形，其中外微分 "d" 的定义是

$$d \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

本分节所研讨的课题是如何对于其他次数（亦即 $0 < k < (n-1)$）的外微分形式定义其外微分运算，使得

$$< d\omega, \Sigma > = \int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = < \omega, \partial\Sigma >$$

普遍成立。[这也就是广义 Stoke's 定理。]

【分析】：

（一）全微分满足下述两个基本、好用的运算律，即

(i) （线性）$d(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 df_1 + c_2 df_2$ （c_i 是常数）

(ii) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$

我们所要探索的外微分乃是全微分的推广，所以它自然也应该有类似的运算律，即

(i) $d(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 d\omega_1 + c_2 d\omega_2$

(ii)′ $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$

其中 k 是 ω_1 的次数。

[注]：因为外积的斜对称性，即

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{k\ell}\omega_2 \wedge \omega_1 \quad (\deg \omega_1 = k,\ \deg \omega_2 = \ell)$$

(ii)′ 中的 $(-1)^k$ 是必须的。例如在 $k = \ell = 1$ 的情形若不加 $(-1)^k$，就会产生下述矛盾：

$$\begin{aligned} & d(\omega_1 \wedge \omega_2) = -d(\omega_2 \wedge \omega_1) \\ \Rightarrow\ & d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2 = -(d\omega_2 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge d\omega_1) \\ \Rightarrow\ & 2d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0 \end{aligned}$$

对于任给一次微分形式 ω_1, ω_2 皆成立，此事显然不对。但是采取 (ii)′, 则有

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2 \\ -d(\omega_2 \wedge \omega_1) &= -\{d\omega_2 \wedge \omega_1 - \omega_2 \wedge d\omega_1) \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2 \end{aligned}$$

而不产生矛盾。由此可见，在 (ii)′ 中加上 $(-1)^k$ 这种更改乃是外积的斜对称性所使然者也。

（二）由

$$< df, \gamma > = < f, \partial\gamma >$$

易见 $\int_\gamma df$ 对于任给闭曲线 γ 恒为 0。由此可见，假如要使得广义 Stoke's 定理对于 $k = 2$ 的情形成立，则其中所用的外微分 "d" 必须使得 $d(df) \equiv 0$，因为

$$< d(df), \Sigma > = < df, \partial\Sigma > \equiv 0$$

（三）设 "d" 是满足 (ii)′ 和 $d^2 g \equiv 0$ 者，则

$$\begin{aligned} & d(f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k) \\ = & df \wedge (dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k) + f \cdot d(dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k) \\ = & df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k + f \cdot 0 = df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k \end{aligned}$$

由此可见，下述定义之外微分运算 "d" 乃是唯一能够具有运算律 (i), (ii)′ 和 $d^2 f \equiv 0$ 者也。所以顺理成章，即有下述外微分之定义：

【定义】：$d\left\{ \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right\}$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

[注]：在全微分的讨论中，我们业已指出，公式

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

不但在 $\{x_i\}$ 是自变元时成立，而是不论 x_i 是自变元或应变元总是普遍成立的。此事至关重要，因为在多元、多关系的数理分析中，那些是自变元，那些是应变元乃是一种因地（或因时）制宜的一种选用吧了。所以在分析学中的重要公式，是很有必要把它们从自变元的选取的「依赖性」中解放出来的。在上述外微分的定义式中，骤看起来，好像是用到 $\{x_i\}$ 乃是自变元的。其实，在 $\{x_i\}$ 不是自变元时，上述公式依然成立！因为上述公式乃是性质 (i), (ii)′ 和 $d^2 x_i \equiv 0$ 的结论。由此可见，外微分运算 d 还有下述重要的性质：

设 Φ 是将 k–维 $\mathbf{t}$–空间中的区域 Ω 映射到一个外微分形式 ω 的定义域 D 之中的一阶可微映射，即

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k \supset & \Omega & \xrightarrow{\Phi} & D & \subset \mathbb{R}^n \\ & \Cup & & \Cup & \\ & \mathbf{t} & \longmapsto & \Phi(\mathbf{t}) & \end{array}$$
$$\Phi(\mathbf{t}) = (\varphi_1(\mathbf{t}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{t}))$$

令 $\Phi^*(\omega)$ 是将 ω 中的 x_i 代以 $\varphi_i(\mathbf{t})$ 之所得，则有

$$d\Phi^*(\omega) = \Phi^*(d\omega)$$

把上述性质应用到 $\Phi : \Omega \to \Sigma \subset D$，且满足规则性，而 ω 则是 $(k-1)$–次微分形式的情形，即可证明下述广义 Stoke's 定理：

【广义 Stoke's 定理】：

$$< d\omega, \Sigma > = \int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = < \omega, \partial\Sigma >$$

证明：设 $\Phi : \Omega \to \Sigma$ 是 k–维曲面的局部坐标化（亦即参数表示）。则有

$$\int_{\Sigma} d\omega := \int_{\Omega} \Phi^*(d\omega), \quad \int_{\partial\Sigma} \omega := \int_{\partial\Omega} \Phi^*(\omega)$$

再者，由 k–维 Gauss 定理即有

$$\int_{\partial\Omega} \Phi^*(\omega) = \int_{\Omega} d\Phi^*(\omega) = \int_{\Omega} \Phi^*(d\omega) = \int_{\Sigma} d\omega \qquad \square$$

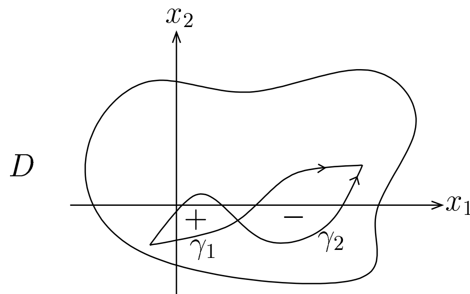
[注]：上述广义 Stoke's 定理乃是微积分基本定理在多元、多关系的分析学中的自然推广，其应用之范畴既深且广，真可以说是妙用无穷者也。本书限于篇幅和尽可能维持所讨论的课题是既基础又初等之选择，将仅仅以几个直接推论和简单的例题习题作一初步简介。

4.3.2 例子

(1) 设 ω 是一个定义于 $\mathbb{R}^2$ 中一个单连通（亦即不含任何空洞）的闭区域 D 上的一阶连续可微的一次微分形式。若 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$（亦即 $d\omega \equiv 0$）

则存在 D 上一个二阶可微的函数 U，使得 $\omega = dU$（亦即 ω 乃是一个全微分）。

证明：如 [图 4–16] 所示，设 γ_1 和 γ_2 是 D 中任给两条具有同样的始、终点的曲线。则 γ_1 和 γ_2 的逆向所组成者乃是 D 中一个定向区域 Ω 的有向边界。



[图 4–16]

由 Green's 定理和所设 $d\omega \equiv 0$ 即有

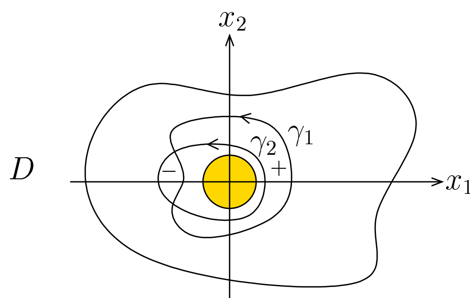
$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega \equiv 0$$

亦即 $\int_\gamma \omega$ 仅仅和 γ 的始、终点有关。所以对于选定起点 $\mathbf{a}$ 的所有曲线 $\int_\gamma \omega$ 乃是其终点的函数，即可定义

$$U(\mathbf{x}) = \int_\gamma \omega \qquad（\gamma \text{ 以 } \mathbf{a} \text{ 和 } \mathbf{x} \text{ 为始、终点}）$$

不难验证如此构造的 $U(\mathbf{x})$ 的全微分就是 ω [其验证留作习题]。

(2) 设 ω 是一个定义于如 [图 4–17] 所示的开区域 D 上的一阶连续可微一次微分形式，而且 $d\omega \equiv 0$。



[图 4–17]

设 γ_1 和 γ_2 是 D 中两条同向地绕 D 的空洞（可能仅仅是原点这一个点）一周的简单闭曲线 (simple closed curve)，则 γ_1 和 γ_2 的逆向所组成者，乃是 D 中一个定向区域 Ω 的定向边界 $\partial\Omega$。同样的，由 Green's 定理和所设 $d\omega \equiv 0$，即有

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega \equiv 0$$

亦即这样的两条定向闭曲线的线积分恒相等。由此不难稍作推广，得知 D 中一条定向闭曲线 γ 的线积分 $\int_\gamma \omega$ 仅仅和它对于 D 的空洞的定向绕数有关，亦即有公式：

$$\int_\gamma \omega = 2\pi c n(\gamma)$$

其中 c 是一个随 ω 而定的常数。令

$$\omega_0 = \frac{-x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

不难验证

$$\widehat{\omega} = \omega - c\omega_0$$

满足 $d\widehat{\omega} \equiv 0$ 而且对于任给 D 中闭曲线 γ 恒有

$$\int_\gamma \widehat{\omega} = \int_\gamma \omega - \int_\gamma c\omega_0 \equiv 0$$

由此易证 $\widehat{\omega}$ 乃是 D 上的一个二阶连续可微的函数 U 的全微分，亦即：

$$\omega = c\omega_0 + dU, \quad (\mathbf{x} \in D)$$

【习题】：试将上述讨论推广到 D 有多个空洞的情形。

(3) 在第四册第五章中，我们由弧长第一变分公式得出一个抽象旋转面中，曲线的曲率公式为

$$\kappa_g(s) = \frac{d\alpha}{ds} + f'(r)\frac{d\theta}{ds}$$

再者，设 Ω 是其中一个给定的区域，其边界 $\partial\Omega$ 分段连续可微，则有其 Gauss-Bonnet 公式，即

$$2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i = \int_\Omega \left(-\frac{f''(r)}{f(r)}\right) dA$$

回顾其证明乃是：

$$\begin{aligned}
&2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g(s)ds - \sum \alpha_i \\
&= \left(2\pi - \int_{\partial\Omega} d\alpha - \sum \alpha_i\right)^{=0} - \int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta \\
&= -\int_{\partial\Omega} f'(r)d\theta = -\int_\Omega f''(r)dr \wedge d\theta \quad \text{（Green's 定理）} \\
&= \int_\Omega \left(-\frac{f''(r)}{f(r)}\right) dA, \quad dA = f(r)dr \wedge d\theta
\end{aligned}$$

所以其证明的关键就是运用 Green's 定理。这个公式把边界的曲线曲率和区域中每点的曲面曲率的关系得以明确。

(4) 在 §4.2.4 的习题 (4)，我们要读者以图解说明 $\int_{\partial\Omega} -ydx, \int_{\partial\Omega} xdy$ 都等于 Ω 的定向面积。其实，它们乃是 Green's 定理的特例是也。这也就是说，即使像求面积这样简单的问题，Green's 定理依然是有其用武之地的（这当然是一种大才小用）。

[以上是对于 $\mathbb{R}^2$ 中的线积分和 Green's 定理的一些实例的讨论。 接著让我们讨论关于 $\mathbb{R}^3$ 中的线积分、面积分的一些实例。因为 $\mathbb{R}^3$ 乃是我们和万物共存于其间者，所以下面所要讨论的实例就更有其现实的意味和重要性。]

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连续可微一次形式 ω_1 有其相应的向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$，亦即

$$\omega_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

而一个 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连续可微的二次形式 ω_2 又有其相对应的向量场，即

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= g_1(\mathbf{x})dx_2 \wedge dx_3 + g_2(\mathbf{x})dx_3 \wedge dx_1 + g_3(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_2 \\
&\updownarrow \\
\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) &= (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

假如我们从一个可微向量场

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$$

出发，先求其相应的一次形式，即

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

然後再求其外微分，即有

$$\begin{aligned}\omega_2 = d\omega_1 &= \sum_{i=1}^{3} df_i \wedge dx_i \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

而它所相应的向量场 $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ 就是

$$d\omega_1 \longleftrightarrow \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \left((\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}), (\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}), (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2})\right)$$

这样就得到一种由一个向量场 $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ 得出另一个向量场 $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ 的运算，它和外微分相对应。其基本算法就是

$$(f_1, f_2, f_3) \longmapsto \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

假如我们把 ∇ 想成一个以 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 为其分量的算子向量，亦即令

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$$

则上述运算就可以表达成

$$\mathbf{F} \longmapsto \nabla \times \mathbf{F}$$

而原先的梯度向量

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$$

则又可以看做算子向量乘以函数 f [这就是在向量分析 (vector analysis) 中通用的符号]。

(6) 假如我们把一个可微向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 对应于其相应的二次形式，即

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$$
$$\updownarrow$$
$$\omega = f_1(\mathbf{x})dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\mathbf{x})dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_2$$

则有 $$d\omega = (\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

所以相当于外微分的运算乃是由一个向量场 $\mathbf{F}$ 去计算它的发散量 (divergence) $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$，而它又可以采用 ∇ 这个算子向量，写成

$$\nabla \cdot \mathbf{F}$$

在向量分析中通用之术语与符号是

函数 f 的梯度向量 grad：∇f
向量场 $\mathbf{F}$ 的发散量 div：$\nabla \cdot \mathbf{F}$
向量场 $\mathbf{F}$ 的涡旋量 curl：$\nabla \times \mathbf{F}$

(7) 在外微分中，由 $d^2 f \equiv 0$ 和它的运算律易证 $d^2\omega \equiv 0$ [其验证留作习题]。由此可见，上述关于向量场的运算即有

$$\nabla \times \nabla f \equiv 0, \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} \equiv 0$$

(8) 从外微分形式来看，$d^2\omega \equiv 0$ 所表达者乃是说：一个外微分形式 $\widehat{\omega}$ 是另外一个低一次的外微分形式 ω 的外微分时（亦即存在 ω 使得 $\widehat{\omega} = d\omega$）则其本身的外微分必然恒等于零，亦即 $d\widehat{\omega} = d(d\omega) \equiv 0$。例如当一个一次形式 $\widehat{\omega}$ 是一个全微分，则必然有 $d\widehat{\omega} \equiv 0$。换句话说 $d\widehat{\omega} \equiv 0$ 乃是存在 ω 使得 $\widehat{\omega} = d\omega$ 的<u>必要条件</u>。由前面对于 $n = 2, k = 1$ 的情形之讨论，可见 $d\widehat{\omega} \equiv 0$ 是否业已构成其充要条件乃是取决于其定义域 D 的某种「拓扑性质」(topological property) [例如 D 是否有空洞]。再者，即使在 D 具有有限个空洞的情形，$d\widehat{\omega} \equiv 0$ 虽然并不能保证它本身是一个全微分，但是它和全微分之间只相差某种非常简单的一次微分形式的线

性组合（参看例 (2) 的讨论）。所以即使在一般情况，虽然 $d\widehat{\omega}\equiv 0$ 并非充分，其实已经是：「虽不中，不远矣」。把这种虽不中不远矣的现象赋予有系统的研究，就可反过来得出定义域的拓扑性质。这就是微分拓扑中的上同调理论 (cohomology theory)。

(9) 设 $D\subseteq\mathbb{R}^3$ 是一个开的实心凸体（例如长方块或实心球）它们都可以连续地收缩到其中任给一点 (contractible)，所以都应该看做是那种不含有任何非平凡的拓扑结构者，亦即是拓扑平凡者 (topologically trivial)。由此可以想到，对于这样的区域上的外微分形式 $\widehat{\omega}$, $d\widehat{\omega}\equiv 0$ 应该业已构成它是一个低一次的 ω 的外微分的充要条件，亦即

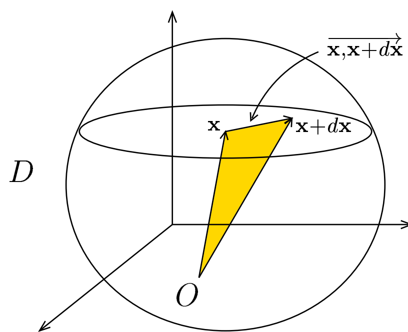
$$\text{“}d\widehat{\omega}\equiv 0 \Leftrightarrow \exists\,\omega \text{ 使得 } \widehat{\omega}=d\omega\text{”}$$

其实，上述事实的证明乃是建立上面所提及的上同调理论的一个基本引理。[它乃是对于任何维数 n 都成立的。在此先行证明 $n=3$ 的情形。]

在 $n=3$ 的情形，只有次数 $k=1$ 和 $k=2$ 是非平凡的，兹分别讨论其验证如下：

$\underline{k=1}$：设 ω 是定义于 D 上的一阶连续可微一次微分形式而且 $d\omega\equiv 0$（恒等于 0）。在 D 中任意取定其基点 O。令 $\overrightarrow{OX}$ 为连结基点 O 和 D 中任给一点 $\mathbf{x}$ 的有向直线段。令

$$U(\mathbf{x})=\int_{\overrightarrow{O\mathbf{x}}}\omega$$



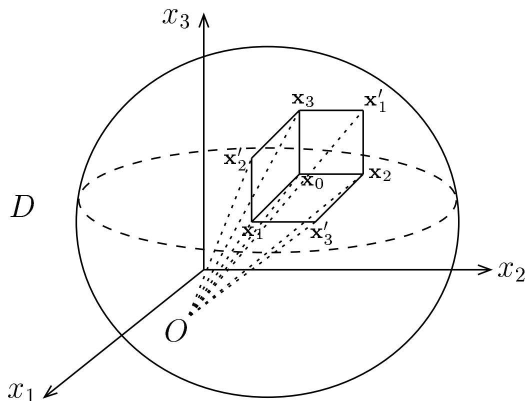
[图 4–18]

由所设 $d\omega \equiv 0$ 和 Stoke's 定理

$$U(\mathbf{x}+d\mathbf{x})-U(\mathbf{x})=\int_{\overrightarrow{\mathbf{x},\mathbf{x}+d\mathbf{x}}}\omega \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}$$
$$\Rightarrow\ dU=\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}=\omega$$

$\underline{k=2}$：设 $\widehat{\omega}$ 是定义于 D 上的一阶连续可微二次微分形式而且 $d\widehat{\omega}\equiv 0$。如 [图 4–19] 所示，$O$ 是 D 中任意取定的基点，$\mathbf{x}_0=(x_1,x_2,x_3)$ 是其中任给一点。令

$$\mathbf{x}_1=(x_1+dx_1,x_2,x_3),\quad \mathbf{x}_2=(x_1,x_2+dx_2,x_3),\quad \mathbf{x}_3=(x_1,x_2,x_3+dx_3)$$
$$\mathbf{x}_1'=(x_1,x_2+dx_2,x_3+dx_3),\quad \mathbf{x}_2'=(x_1+dx_1,x_2,x_3+dx_3),$$
$$\mathbf{x}_3'=(x_1+dx_1,x_2+dx_2,x_3)$$
$$\widehat{\omega}=g_1(\mathbf{x})dx_2\wedge dx_3+g_2(\mathbf{x})dx_3\wedge dx_1+g_3(\mathbf{x})dx_1\wedge dx_2$$



[图 4–19]

令

$$f_1(\mathbf{x}_0)=\lim_{dx_1\to 0}\frac{1}{dx_1}\int_{\triangle O\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1}\widehat{\omega}$$
$$f_2(\mathbf{x}_0)=\lim_{dx_2\to 0}\frac{1}{dx_2}\int_{\triangle O\mathbf{x}_0\mathbf{x}_2}\widehat{\omega}$$
$$f_3(\mathbf{x}_0)=\lim_{dx_3\to 0}\frac{1}{dx_3}\int_{\triangle O\mathbf{x}_0\mathbf{x}_3}\widehat{\omega}$$
$$\omega=\sum_{i=1}^{3}f_i(\mathbf{x}_0)dx_i$$

一方面，不难验证下述二阶逼近：

$$\int_{\partial\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2} \omega \equiv \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \cdot dx_2$$

$$\int_{\partial\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_3} \omega \equiv \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \cdot dx_3$$

$$\int_{\partial\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2'\mathbf{x}_1} \omega \equiv \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \cdot dx_1$$

[其验证留作习题，用微分均值定理。]

而另一方面，由 $f_i(\mathbf{x})$ 的定义，$d\widehat{\omega} \equiv 0$ 和 Stoke's 定理即有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2} \omega &= \int_{\triangle O\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1} \widehat{\omega} + \int_{\triangle O\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3'} \widehat{\omega} + \int_{\triangle O\mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2} \widehat{\omega} + \int_{\triangle O\mathbf{x}_2\mathbf{x}_0} \widehat{\omega} \\ &\overset{\text{Stoke's}}{\underset{\text{定理}}{=}} \int_{\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2} \widehat{\omega} \equiv g_3(\mathbf{x}_0) dx_1 \cdot dx_2\end{aligned}$$

同理亦有

$$\int_{\partial\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_3} \omega = \int_{\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_3} \widehat{\omega} \equiv g_1(\mathbf{x}_0) dx_2 \cdot dx_3$$

$$\int_{\partial\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2'\mathbf{x}_1} \omega = \int_{\Box \mathbf{x}_0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2'\mathbf{x}_1} \widehat{\omega} \equiv g_2(\mathbf{x}_0) dx_3 \cdot dx_1$$

这也就验证了 $\widehat{\omega} = d\omega$。

[注]：(i) 改用向量分析的运算来表达，则上述引理乃是：设 $\mathbf{F}$ 是定义于一个开的实心凸体上的可微向量场，则

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \exists\, f \text{ 使得 } \mathbf{F} = \nabla f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{V} \text{ 使得 } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{V}$$

这是在电磁学的场论中极为重要的引理。

(ii) 因为外微分运算是在坐标变换下保持不变的，亦即

$$d\Phi^*(\omega) = \Phi^*(d\omega)$$

由此易见上述引理对于任何和实心凸体可微同胚 (diffeomorphic) 的区域也当然成立。

(iii) 不难把上述构造法和论证推广到一般的 n 和 k 的情形。这也就是在上同调理论中的一个基本引理——Poincaré Lemma。

[接著让我们来分析一下定义域 D 并非实心凸体的情形，看一看上述引理究竟要作何种修改？有鉴于非实心凸体是非常多种多样的，例如一个含有气泡的玻璃球，一个被虫蛀了各种各样的洞的水果等等。基于以简御繁的方法论，我们应该先从一些既简单又典型的实例著手研讨问题的本质。]

(10) 设 D 是一个仅仅含有一个气泡的球体，例如

$$D = \{(x_1, x_2, x_3);\ r_0^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

在这样的情形，设 ω 是一个 $d\omega \equiv 0$ 的一次微分形式。则它在任给 D 中的闭曲线 γ 上的线积分依然恒等于零。

$$\oint_\gamma \omega \equiv 0$$

其理由是 D 中的任给闭曲线 γ 总是可以有一片曲面 Σ 使得 $\gamma = \partial\Sigma$（证明留作习题）。所以

$$\int_\gamma \omega = \int_\Sigma d\omega \equiv 0$$

由此可见其线积分 $\int_\gamma \omega$ 仅仅和其端点有关，而且 ω 本身乃是某一个 D 上的二阶连续可微函数 U 的全微分，即 $\omega = dU$。所以在这种 D 上，引理对于 $k = 1$ 的情形依然成立。

接著让我们来看一看 $k = 2$ 的情形。设 ω 是 D 上一个其外微分恒等于 0 的二次微分形式，即 $d\omega \equiv 0$。设 Σ 是一个定向的闭曲面，若其内部并不包含 D 的那个气泡，亦即 $\Sigma = \partial\Omega$ 而 $\Omega \subset D$，则由 Gauss 定理，即有

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Omega d\omega = 0$$

再者，若 Σ 的内部包含那个气泡则我们就无法用 Gauss 定理去得出 $\int_\Sigma \omega = 0$。例如 §4.2.4 习题 (9) 中所算得的

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}\{x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2\}\end{aligned}$$

则不难验证

$$\int_\Sigma \omega_0 = 4\pi$$

但是在这种情形，并非 Gauss 定理就变得「无用武之地」的了。其实它还是可以用来证明

$$\int_{\Sigma_1} \omega = \int_{\Sigma_2} \omega$$

对于两个包含那个气泡于其内部而且都以向外法向量为其定向的 Σ_1, Σ_2 恒成立（证明留作习题）。

再者，令上述共同值为 c（随 ω 而定之常数），则 $\widehat{\omega} = \omega - \frac{c}{4\pi}\omega_0$ 就满足

$$\int_\Sigma \widehat{\omega} = 0$$

对于任给 D 中的闭曲面恒成立。所以也可以用类似的构造法得出一个一次微分形式 ω_1 使得

$$\widehat{\omega} = d\omega_1$$

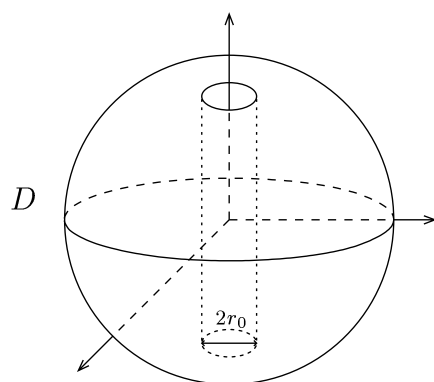
读者试自证之。

【思考题】：如 [图 4–20] 所示 D 是一个在 z–轴邻近被虫蛀了一个圆洞的球形水果，亦即 D 中之点的圆柱坐标满足下述条件，即

$$D = \{(r, \theta, z);\ r^2 + z^2 < R^2,\ r_0 < r < R\}$$

试证：(i) D 上任给满足 $d\widehat{\omega} \equiv 0$ 的二次微分形式都是另一个一次微分形式的外微分，亦即存在 ω_1 使得 $\widehat{\omega} = d\omega_1$。

(ii) 设 ω 是一个 D 上满足 $d\omega \equiv 0$ 的一次微分形式，则存在一个由 ω 而定的常数 c，和适当的 D 上的可微函数 U，使得 $\omega = dU + cd\theta$。



[图 4–20]

编後语

本书共分五册，分别对于基础数学中的：基础代数学；定性与定量平面几何和立体几何基础论；向量几何、解析几何与球面几何；单元微积分和多元微积分做了一遍反璞归真探本究源的研讨与建构。希望它能有助于青年学子们学好基础数学，并从中获得启发与奠基；也希望它能有助于正在教学育人、辛勤耕耘的老师们，把基础数学教得更加精简实用、平实近人、引人入胜。这也就是我试著写这样一组讲义的本意和心愿。

纵观古今中外，整个人类理性文明的发展史中，基础数学一直扮演著核心的角色。它不但是人类世代相承，对于大自然由表及里精益求精的认知、研究的基本工具，它也是整个自然科学在思想上、在方法论上的先行者和奠基者。由此可见，学习基础数学乃是一个有智而且有志的青年，作为一个人类理性文明的继承者的启蒙与奠基，也是把自己培训、拙壮成一个善于认识问题、善于解决问题、富有理性的人的不二法门。例如几何学是当之无愧的第一科学，它对于我们和宇宙万物共存于其间的空间，其精简美妙的本质精益求精的认知，乃是理性文明发展中贯串古今的重大篇章。在第二、三册的研讨中，读者应该让自己身历其境地去体会先贤们如中国古代善用面积的测量术；Hippasus 不可公度性的发现，Eudoxus 以逼近法对于定量几何基础论的重建与拓展，Archimedes 继承 Eudoxus 穷尽原理的妙用；圆锥截线的故事，解析几何的发明，非欧几何的发现，高维勾股定理与 Grassmann 代数等等；它们乃是理性文明史中，引人入胜、发人深思的诗篇。

代数学的基本思想就是善用运算律去探讨各种各样代数问题的系统解法。在运算律中，最具威力者首推分配律；而在各种各样代数问题之中，线性问题乃是最为简单者。在中国古算中的韩信点兵法（亦即孙子

算法，因为它可考的最早出处是东汉的孙子算经），业已把如何善用分配律去解决线性问题的基本思想，直截了当地展现无遗。从本书各册的研讨中，可以看到线性问题既简单又基本而且广泛有用，例如第三册中所讨论的向量几何：将空间的平移（亦即位移向量）妥加组织，引入自然的代数结构（亦即加法、倍积、内积和 $\times$–积）则空间的基本定理（如相似三角形定理、勾股定理、面积公式、高维勾股定理）都可以转换成分配律。由此可见，欧氏空间的几何结构可以全面代数化，而其所得的向量代数则是一种线性代数 (Linear Algebra)。再者，微分学的基本思想乃是有系统地运用局部线性逼近去分析各种各样变量问题；而微分和积分运算本身又都是线性运算。读者不但应该认识到线性代数的基本重要性和广泛可用性，而且也应该体会到解决各种各样的线性问题的基本方法，实乃中国古算中的韩信点兵法一以贯之者也。

概括地来说，基础代数学的基础理论有二，其一是对于一元多项式的基础理论，例如插值公式，泰勒公式和辗转相除求最高公因式等；其二则是行列式和线性方程组的基础理论。而这些基础理论的发现与论证的基本方法都是归纳法，亦即由低次到高次，由少元到多元，逐步归纳地去探索、研讨和论证。总之，归纳法乃是代数学治学的基本方法，而善用分配律则是代数学的基本想法。

宇宙中各种各样事物和现象，动态乃是其常态，而静态则仅仅是其中极为少见的特例。由此可见，若要从这样无穷无尽，不断变化的万物万象中，由表及里探索其中所蕴含的规律性，当然就需要有一种善于分析变量问题的数学。数理分析 (Mathematical Analysis) 乃是我们由表及里，定量地深入探索大自然的本质的基本方法；而分析学 (Analysis) 也就是如此发展起来的一门数学。本书第四、第五册所研讨的单元、多元微积分则是分析学的基础理论。

当我们要对于某一种变量问题运用数理分析去探索其本质与规律时，分别以变元表达其中所含的各种变量，以函数关系去描述其各个变量之间的相互关联 (interlocking relationship)；而对于这样一个变量问题的数理分析也就是要对于描述它的那些函数关系 (functional relations) 做系统的定量分析。其中最最简单的情形就是那种只含两个变元，而且其一可以表达成其另一之函数（例如 $y = f(x)$）。对于这种最简的情形的基础理论就是单元微积分，它是进而研讨一般的多元、多关系的数

理体系的雏形和奠基。在第五册所研讨的多元微积分乃是以单元微积分所得者为基础，进而推广拓展而成者，它才是能够对于一般多元、多关系的变量问题作系统数理分析的基础理论。其中全微分和隐函数定理，外微分和 Stoke's 定理尤为基本重要。

在数理分析中，通常把所要研讨的数理体系所含的诸多变元看做一个点的坐标，则它们总体的变域就是坐标空间中的某种子集。隐函数定理的几何意义是：由一组可微的函数关系所描述的子集，在其描述函数的全微分是线性无关之点（称之为规则点）的邻近乃是一片 $(n-m)$–维曲面，而且可以选取适当的 $(n-m)$ 个变元作为其局部坐标系。再者，定义在这种子集上（或某种包含它的坐标空间的子集之上）的函数、外微分形式或向量场则是各种各样植根于空间的解析事物 (analytic objects)。在本册第四章所讨论的积分则是空间中的几何事物和上述解析事物之间自然的相互作用所得之值，其关系有如第一册的附录中所讨论的向量空间和其偶空间之间的相互作用。由此可见，多元积分所描述者，乃是空间中的几何事物（即 k–维子集）和外微分形式这种解析事物之间的自然对偶关系，而微积分基本定理则可以推广为广义 Stoke's 定理！它证明了解析的外微分和几何的「求边界」两者之间的对偶性。这的确是一种应用广阔，意义深远的推广，读者宜多读多想它几遍，然後再在它的各种各样的应用之中（例如电磁学、微分几何学、微分拓扑学等等）逐步、逐样地去体会其用场和意义。

项武义

二〇〇三年　秋
于香港科技大学